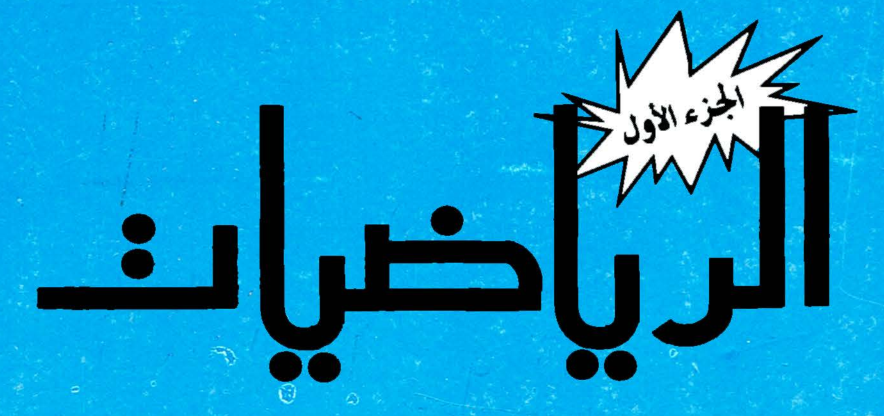
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التعليم الثانوي العام



الرياضيات

السنة الأولى من التعليم الثانوي

طبعة منقحة

الجذعان المشتركان:

- علوم
- تكنولوجيا

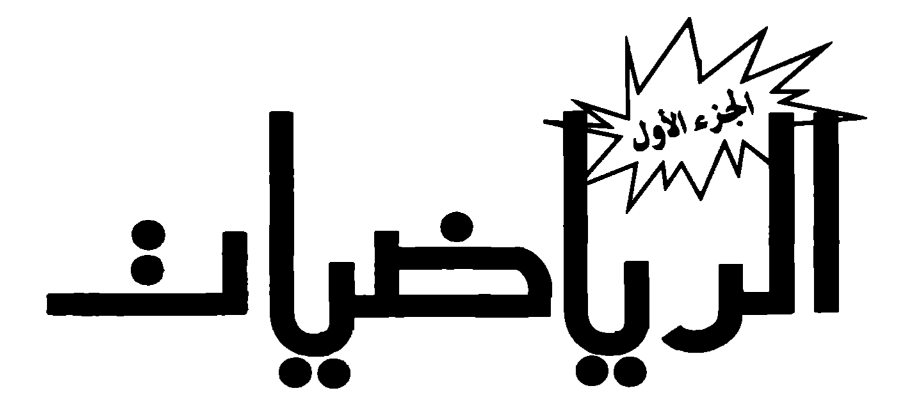


الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

الجمهوريــــة الجزائريــــة الديمقراطيــــة الشعبيــــة

وزارة التربيــــة الوطنيــــة

مديرية التعليم الثانوي العام



السنة الأولى من التعليم الثانوي



الجذعان المشتركان:

- علوم
- تكنولوجيا



الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

المؤلفـون :
عبد القادر سامي : مفتش التربية والتكوين
محمد عوان : مفتش التربية والتكوين
السيدة كشيش : أستاذة التعليم الثانوي
قويدر فلاح : أستاذ التعليم الثانوي
منصور بوخلوف : أستاذ التعليم الثانوي
تعـديـل :
عبد القادر سامي : مفتش التربية والتكوين
محمد عوان : مفتش التربية والتكوين
خالد محتوت : أستاذ رياضيات

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة :

لعل من المسلم به أن الكتاب المدرسي،وخاصة في نظامنا التربوي وفي الوضع الراهن، يعتبر في مقدمة الوثائق التربوية والوسائل الأساسية بالنسبة لعملية التعليم والتعلم. فوجوده يكتسي أهمية بالغة سواء بالنسبة للتلميذ أو الأستاذ. إذ هو مرجع للأول وسند بيداغوجي للثاني. والواقع أن بعض الكتب المستعملة في مرحلة التعليم الثانوي، والتي يعود تاريخ إصدار أكثرها إلى الثمانينات، اصبحت لا تساير المناهج لا من حيث المحتوى ولا من حيث المنهجية، نظرا لما اعترى برامج هذه المرحلة التعليمية من تغيير وتعديل، خاصة مع بداية العشرية الجارية التي عرف فيها التعليم الثانوي تغييرات معتبرة شملت بنيته ومحتواه. الأمر الذي زاد في اتساع رقعة التباين وقلة الانسجام بين البرامج التعليمية، والكتب المدرسية المتداولة التي بقيت كما هي منذ تأليفها.

وفي إطار الإجراءات التحسينية الشاملة والمتكاملة، ولمعالجة النقائص والاختلالات البينة والعمل باستمرار على ترقية العوامل والوسائل التي تسهم في تحقيق الأهداف التربوية المسطرة، رأينا أن نشرع هذه السنة وتحضيرا للدخول المدرسي 1999 / 2000 في عملية تصحيح وتعديل وإثراء مضامين الكتب المدرسية المستعملة وتكييف محتوياتها - ما أمكن ذلك - مع البرامج المطبقة، مع مواصلة إعداد كتب جديدة لتغطية جميع المواد المدرسة والأساسية منها على الخصوص. هذا إلى جانب الإعداد لبناء مناهج جديدة - في إطار الإصلاح - ثم وضع كتب موافقة لها.

وتجدر الإشارة بهذا الصدد، إلى أن قضية الكتاب المدرسي لا تكمن في نوعيته وتوفره بين أيدي التلاميذ فحسب، بل تتعدى ذلك إلى كيفية استعماله بفعالية وإدراك وظيفته وأساليب استثمار محتوياته والانتفاع به. وهي أمور ينبغي للسادة الأساتذة أن يولوها العناية والاهتمام اللازمين.

أخيرا، نأمل أن يكون في هذا العمل ما يعزز جهود الأساتذة ويساعدهم على أداء مهامهم التربوية، وأن يجد فيه التلاميذ الأداة المشوقة والمحفزة على العمل والاجتهاد في طلب العلم.

والله ولي التوفيق

مدير التعليم الثانوي العام

بسم الله الرحمن الرحيم

المقـدمـة :

هذا الكتاب موجه إلى أساتذة وتلاميذ السنة الأولى من التعليم الثانوي جذعان مشتركان علوم وتكنولوجيا

وهو موافق للبرنامج الرسمي الذي تم إصداره سنة 1995،

لقد صيغت جميع دروس هذا الكتاب بما يناسب مستوى التلميذ من بسيط الأسلوب اللغوي مع الحرص على الدقة في التعبير عن المفاهيم الرياضية.

يتكون هذا الكتاب من جزئين

الجزء الأول تحتوي على خمسة أبواب

والجزء الثاني يحتوي على أربعة أبواب

وكل باب منها يحتوي على عدة دروس.

توجد في آخر كل باب تمارين كثيرة ومتنوعة، يمكن للأستاذ إستغلالها والإستفادة منها لترسيخ المفاهيم وإعطاء التلاميذ فرصة للتفكير في القسم أو في المنزل.

الباب الأول خاص بالمنطق الذي ينبغي تدريسه من حيث الإستعمال وليس من شأن ذاته.

الباب الثاني (الحساب العددي) والباب الثالث (الهندسة المستوية) خاصان بمراجعات وتتمات أساسية تقدم في بداية العام الدراسي ويتم الرجوع إليها كلما إقتضت الضرورة ذلك.

الباب الرابع (العلاقات ، التطبيقاتة ، العمليات الداخلية ، البني الجبرية) ينبغي تقديم مواضعه بالدقة اللازمة دون التوسع في دراستها.

الباب الخامس (الأشعة) والباب السادس (المعادلات والمتراجحات) هامان جداً ويلعبان دوراً أساسياً في المراحل المقبلة.

الباب السابع (حساب المثلثات) والباب الثامن (الدوال العددية) يزودان التلميذ بالعناصر الأولية والأساسية في حساب المثلثات وفي التحليل.

الباب التاسع (الهندسة الفضائية) يساعد التلميذ على تصور الأشكال في الفضاء.

وأخيرا نرجو من كل الذين يستعملون هذا الكتاب أن يوافونا بكل الانتقادات والملاحظات والإقتراحات التي من شأنها تحسين نوعية هذا الكتاب وجعله أكثر ملاءمة مع تطبيقها واستعمالها في الأقسام.

والله ولي التوفيق

المؤلفون

برنامج السنة الأولى ثانوي

الجذعان المشتركان: علوم وتكنولوجيا.

المواضيع	عدد الساعات	التعاليق و التوجيهات
1 _ المنطق : 1. القضية ونفيها، الوصل والفصل ونفيهما، الإستلزام والتكافؤ المنطقي، العكس النقيض لإستلزام. 2. مفهوم الجملة المفتوحة إنطلاقًا من أمثلة بسيطة. 3. المكممات، نفي قضية مكممة. 4. أنماط البرهان : الإستنتاج ، البرهان بالخلف، البرهان بمثال مضاد، البرهان بالعكس النقيض، البرهان، بفصل الحالات.	08	- ينبه الأستاذ تلاميذه على أهمية المنطق ويعودهم على ضرورة إستعماله إستعمالا صحيحًا. - يتجنب الأستاذ الإطالة غير المجدية في كل من جداول الحقيقة والقضايا المعقدة. - يمكن معالجة الفقرة 4 في حصة الأعمال التوجيهية.
2 _ المجموعات 1. المجموعات والجمل المفتوحة. 2. العمليات على المجموعات : متممة مجموعة جزئية _ مجموعة تقاطع، إتحاد مجموعتين _ تساوي مجموعتين _ الفرق والفرق التناظري لمجموعتين.	04	- على الأستاذ أن يوظف المنطق توظيفا جيدا في هذه الفقرة وأن يتجنب المبالغة في إستعمال المخططات السهمية.

3 . مجموعة أجزاء مجموعة _ التجزئية.		- يمكن معالجة الموضوع 3 في حصة الأعمال التوجيهية
3 _ أنشطة حول الحساب العددي : 1. الحساب في ك : الكسور والعمليات عليها. 2. الحساب في ح : القوى الصحيحة والعمليات عليها _ الجذور التربيعية والعمليات عليها _ النسبة التناسب _ العلاقة "$\leq$" والمجالات في ح _ القيمة المطلقة وخواصها. 3. حصر عدد حقيقي _ القيم التقريبية لعدد حقيقي. 4. قوى العدد 10 والعمليات عليها. آليات حساب الجذر التربيعي التام أو المقرب لعدد ناطق موجب. حصر لكل من: مجموع، فرق، جداء، نسبة عددين، جذر تربيعي لعدد.	12	- هذه المواضيع درست في التعليم الأساسي ونظرًا لأهميتها في تمكين التلاميذ من التحكم أكثر في آليات الحساب على الأستاذ أن يدعمها بالمنطق والمجموعات كلّما كان ذلك ممكنًا. _ يمكن معالجة الفقرة 4 في حصة الأعمال التوجيهية.
4 _ العلاقات : 1. العلاقة، العلاقة العكسية	12	على الأستاذ تجنب المبالغة في استعمال المخططات

المحتوى	الحجم الساعي	التوجيهات
لعلاقة، الدالة، التطبيق، التطبيق المتباين – التطبيق الغامر – التطبيق التقابلي – مركب تطبيقين. 2. العلاقة في مجموعة وخواصها : علاقة التكافؤ – علاقة الترتيب. 3. أصناف التكافؤ – مجموعة حاصل القسمة. 4. العمليات الداخلية في مجموعة وخواصها. بنية الزمرة والحلقة. **5 _ كثيرات الحدود :** 1. تعاريف : الدالة وحيد الحد – الدالة كثير حدود لمتغير حقيقي واحد – كثير الحدود المعدوم. 2. العمليات على كثيرات الحدود جذور كثير حدود. 3. تحليل كثير حدود – المتطابقات الشهيرة : $(أ-ب).(أ+ب)$. $(أ+ب)^{2}$. $(أ-ب)^{2}$. $(أ-ب)^{3}$. $(أ+ب)^{3}$. $أ^{3}-ب^{3}$. $أ^{3}+ب^{3}$.	10	السهمية في هذه الفقرة وتقديمها بإستعمال أمثلة بسيطة. – يمكن معالجة هذه الفقرة 3 في حصة الأعمال التوجيهية. في الفقرة 4 ينبغي تنويع التمارين لإستعمال المفاهيم المدروسة وترسيخ التقنيات الحسابية. بالنسبة للبنى الجبرية نكتفي بإعطاء تعريف الزمرة والحلقة مع أمثلة. – يقدم الأستاذ في هذه الفقرة تمارين عديدة ومتنوعة بهدف ترسيخ هذه المفاهيم وتمكين التلاميذ التحكم أكثر في قواعد الحساب مثل : النشر – التحليل – التبسيط – الترتيب.

4. إشارة كثير حدود بمتغير حقيقي واحد : إشارة ثنائي الحد من الدرجة الأولى. 5. الشكل النموذجي لكثير حدود من الدرجة الثانية - إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية. **6 _ المعادلات والمتراجحات والجمل :** 1. المعادلات : المعادلات المتكافئة وقواعدها - حل معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد. أمثلة على معادلات يؤول حلّها إلى معادلة من الدرجة الأولى. حل معادلة من الدرجة الثانية ذات مجهول واحد. مجموع وجداء حلّي معادلة من الدرجة الثانية. 2. المتراجحات : المتراجحات المتكافئة وقواعدها - حل متراجحة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد. أمثلة على متراجحات يؤول حلّها إلى متراجحة من الدرجة الأولى.	10	- يمكن للأستاذ إدراج تحليل كثير حدود في حصة الأعمال التوجيهية والإشارة إلى القسمة الإقليدية. - المواضيع الواردة في هذا الباب هي مناسبة يستغلها الأستاذ من أجل تدريب التلاميذ على الإستعمال السليم للتكافؤات.

المحتوى	الحجم الساعي	ملاحظات
حل متراجحة من الدرجة الثانية ذات مجهول واحد. 3. تطبيقات : إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية. حل معادلات ومتراجحات وسيطية. 4. جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقين. طرق الحل التعويض -الجمع- إدخال المحدد.		- يمكن معالجة هذه المواضيع في حصة الأعمال التوجيهية. - يمكن للأستاذ أن يختار أمثلة ملموسة.
7 _ الدوال العددية لمتغير حقيقي: 1. عموميات : مجموعة تعريف- الدالة الزوجية - الدالة الفردية الدالة المتزايدة - الدالة المتناقصة - نسبة التزايد - اتجاه تغير دالة - تعريف التمثيل البياني. 2. النهايات : مفهوم النهاية. 3. الدراسة والتمثيل البياني للدوال : أ) س ← أ س + ب . أ ≠ 0 ب) س ← أ س^{2} . أ ≠ 0 . حـ) س ← أ س^{2} + ب س + حـ . أ ≠ 0 ء) س ← $\frac{أ}{س}$. أ ≠ 0 . يتم إدخال مفهوم المستقيمات المقاربة من خلال دراسة هذه الدالة.	10	- يتم إستخراج مفهوم النهاية إنطلاقا من أمثلة بسيطة وتوظيف المتراجحات. - يمكن للأستاذ إدراج الدراسة والتمثيل البياني : للدوال حـ) وء)في حصة الأعمال التوجيهية ويستحسن أن يتطرق إلى أمثلة لها علاقة بمادة أخرى كالفيزياء مثلا بالنسبة للدالة وذلك لتمكين التلاميذ من تحليل المنحنيات.

8 _ الهندسة المستوية : 1. مراجعة وتتمات في الهندسة المستوية حول المواضيع التالية : المستقيمات المتوازية – المستقيمات المتعامدة – المسافة بين نقطتين – المسافة بين نقطة ومستقيم – التناظر المركزي – التناظر المحوري – المستقيمات في المثلث – تقايس مثلثين – الأشكال الرباعية – الدائرة – الوضعية النسبية لدائرتين ولدائرة ومستقيم – الزوايا المركزية – الزوايا المحيطية – شرط انتماء أربع نقط إلى نفس الدائرة (الرباعي الدائري). 2. مجموعات النقط في المستوى : مجموعة النقط المتساوية البعد عن نقطتين – مجموعة النقط المتساوية البعد عن مستقيم وعن مستقيمين. 3. الإنشاءات الهندسية.	15	– تقدم هذه الفقرة من خلال تمارين ومسائل مختارة وهذا في بداية السنة. – تعطي أهمية خاصة للإنشاءات الهندسية والبحث عن مجموعة النقط في المستوى لأنها تساعد التلاميذ على تنمية قدراتهم على الحدس والاستدلال. – يمكن للأستاذ إدراج فقرة الإنشاءات الهندسية في حصة الأعمال التوجيهية.

9 – الهندسة التحليلية المستوية:		
1. الأشعة : الثنائية النقطة – التساير وخواصه – تعريف شعاع – تعريف وخواص الجمع الشعاعي – ضرب شعاع بعدد حقيقي وخواصه – توازي شعاعين – الإستقلال والإرتباط الخطي لشعاعين. 2. المعلم الخطي : المحور – القيس الجبري لشعاع – خواصه – المعلم الخطي – فاصلة نقطة. 3. المعلم في المستوى : الأساس في المستوي – المركبتان السلميتان لشعاع – شرط توازي شعاعين – المعلم في المستوي – المعلم المتعامد والمتجانس – إحداثيات نقطة – تغيير المعلم. 4. الهندسة التحليلية المستوية : التمثيل الوسيطي لمستقيم – المعادلة الديكارتية لمستقيم – شرط توازي مستقمين معينين بمعادلتيهما	20	– تعالج هذه المفاهيم بعناية لتمكين التلاميذ من توظيفها في ميادين شتى وخاصة في الفيزياء، مع عدم التطرق للفضاءات الشعاعية. – توظف بعض مفاهيم الفقرة في علاقة التساير. – يمكن للأستاذ معالجة تغيير المعلم الخطي في حصة الأعمال التوجيهية. – ينبغي الإشارة إلى أهمية العناصر الأساسية للهندسة التحليلية الواردة في

الديكارتية تجزئة المستوي بمستقيم معين بمعادلته ـ تطبيقات على الحل البياني لمتراجحات من الدرجة **الأولى** ذات مجهولين حقيقيين .		هذا الباب **والإهتمام البالغ** الذي يجب على الأستاذ **أن يوليه** للحساب الشعاعي.
5 . إستعمال المعلم ـ تغيير المعلم بتغيير الأساس ـ نظرية طاليس ـ مركز المسافات المتناسبة لنقطتين ولثلاثة نقط ـ إنشاء مركز المسافات المتناسبة .		ـ يمكن تقديم **هذه الفقرة في** حصة الأعمال التوجيهية .
10 ـ حساب المثلثات : **1.** **الأقواس** والزوايا : **الأقواس والزوايا الهندسية** وقياسها ـ**القوس الموجه** ـأقياس الأقواس **الموجهة** ـ**الدائرة المثلثية** . 2. الدوال الدائرية : تعريف الدوال الدائرية (جب ، تجب ، ظل) مجموعة التعريف ـ الدور ـ العلاقة بين جب س ، تجب س ، ظل س . العلاقة بين قيم الدوال الدائرية من أجل العدد س والأعداد التالية : − س ، π + س ؛ π − س ، $\frac{\pi}{2}$ − س ، $\frac{\pi}{2}$ + س . (س مقدرة بالراديان) قيم الدوال الدائرية من أجل القيم : 0 ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{2}$.	12	• معظم المفاهيم **الواردة في** هذا الباب تستحق إهتماماً وعناية لتزويد التلاميذ بالعناصر **الأساسية** في حساب المثلثات .

3. المعادلات المثلثية الأساسية : جب س = جب α ، تجب س = تجب α ، ظل س = ظل α حل المعادلات المثلثية وتمثيل صور هذه الحلول على دائرة مثلثية . 11 ـ الهندسة الفضائية : 1. تعيين المستقيم والمستوي في الفضاء 2. الأوضاع النسبية لمستقيمين ـ لمستقيم ومستوي ـ لمستويين. التوازي والتعامد في الفضاء .	12	• يمكن تقديم هذه الفقرة في حصة الأعمال التوجيهية . • تقدم هذه المفاهيم بصفة وصفية وبواسطة رسومات وتمارين عديدة ومتنوعة تسمح للتلاميذ بتصور الأشكال في الفضاء .

الباب الأول

المنطق والمجموعات

تقدم في هذا الباب بعض عناصر المنطق (القضايا ، الجمل المفتوحة ، الروابط المنطقية ، المكمات . أنماط البرهان) وربطها بالمفاهيم المتعلقة بالمجموعات

لا تدرس مواضيع هذا الباب بشكل موسع وإنما ينبغي التركيز على استعمالها واستغلالها في الدروس القادمة .

1 مبادىء في المنطق

1 ـ القضايا

ـ تعريف

نسمي قضية كل جملة يمكننا أن نقول عنها إنها إما صحيحة وإما خاطئة .

أمثلة :

ـ مجموع العددين 2 و 3 هو 5 (1)

ـ العدد 3 أصغر من العدد 1 (2)

ـ مجموع العددين الطبيعين س و 1 هو 5 ، (3)

الجملة الواردة في المثال (1) هي قضية صحيحة .

الجملة الواردة في المثال (2) هي قضية خاطئة .

الجملة الواردة في المثال (3) ليست قضية لأنه لا يمكننا أن نقول عنها إنها صحيحة أو خاطئة إلا إذا أعطيت للحرف س قيمة معينة .

ملاحظة :

• الصيغ والكتابات الرياضية مثل :

$4 > 8$ ، $4 \ni$ ط ، $\frac{1}{2} \ni$ ط ، س $+ 1 = 0$ تعتبر جملا .

• كل قضية تكون إما صحيحة وإما خاطئة ولا يمكن أن تكون صحيحة وخاطئة في آن واحد .

جدول الحقيقة :

إذا كانت القضية ه صحيحة ندل عليها بالرمز 1 وإذا كانت ه خاطئة ندل عليها بالرمز 0

الجدول

ه
1
0

يسمى جدول الحقيقة للقضية ه .

2 ـ الروابط المنطقية

نفي قضية :

نسمي نفي القضية ه القضية التي نرمز إليها بالرمز $\overline{ق}$ المعرفة كما يلي : إذا كانت ه صحيحة تكون $\overline{ق}$ خاطئة وإذا كانت ق خاطئة تكون $\overline{ق}$ صحيحة .

جدول الحقيقة للنفي

ق	$\overline{ق}$
1	0
0	1

أمثلة :

- نفي القضية « تقع قسنطينة في الشرق الجزائري » هو القضية « لا تقع قسنطينة في الشرق الجزائري ».
- نفي القضية « 5 هو عدد طبيعي فردي » هو القضية « 5 ليس عددا طبيعيا فرديا ».
- نفي القضية « قطرا المربع متقايسان ». هو القضية « قطرا المربع ليسا متقايسين ».

الوصل :

> **نسمي وصل القضيتين ق ، ك القضية (ق و ك) التي لا تكون صحيحة إلا إذا كانت ق ، ك صحيحتين معًا .**
> **وندل عليها بالرمز ق ∧ ك**

جدول الحقيقة للوصل

ق	ك	ق ∧ ك
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

أمثلة :

- القضية « الجزائر دولة إفريقية وفي عام 1980 بلغ عدد سكانها مائة مليون نسمة » خاطئة لأن القضية « في عام 1980 بلغ عدد سكانها مائة مليون نسمة » خاطئة .

- « قطرا المستطيل متقايسان ولهما نفس المنتصف » هي قضية صحيحة لأن كلا من القضيتين « قطرا المستطيل متقايسان » و « لقطري المستطيل نفس المنتصف » صحيحة .

- القضية « $2 < 3$ و $3 < 5$ » صحيحة . وتكتب في أغلب الأحيان على الشكل : $5 > 3 > 2$

الفصل :

نسمي فصل القضيتين ق ، ك القضية (ق أو ك) التي لا تكون خاطئة إلا إذا كانت القضيتان ق و ك خاطئتين معا وندل عليها بالرمز ق ∨ ك

جدول الحقيقة للفصل

ق	ك	ق∨ك
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

أمثلة :

- القضية « قطرا المستطيل متوازيان أو قيساهما مختلفان » خاطئة لأن كلاً من القضيتين « قطرا المستطيل متوازيان » و « قيساهما مختلفان » خاطئة .
- القضية « يمر وادي الرمال بمدينة مستغانم أو بمدينة قسنطينة » صحيحة لأن القضية « يمر وادي الرمال بمدينة قسنطينة » صحيحة .
- القضية « $50 = 2 \times 25$ أو $50 = 5 \times 10$ » صحيحة لأن كلاً من القضيتين « $50 = 2 \times 25$ » و « $50 = 5 \times 10$ » صحيحة .

ملاحظة :

يسمى الفصل المعرف سابقا فصلاً متضمناً . يوجد نوع آخر من الفصل يدعى فصلا مانعًا لا يكون صحيحا إلا إذا كانت إحدى القضيتين صحيحة والأخرى خاطئة . نعبر عن الفصل المانع للقضيتين ق ، ك بالكتابة : إما ق وإما ك .

الاستلزام :

> **لتكن ق و ك قضيتين .**
> **تُسمى القضية ($\bar{ق} \vee ك$) استلزامًا ويرمز إليها بالرمز ($ق \Leftarrow ك$)**

يقرأ ($ق \Leftarrow ك$) : « ق يستلزم ك » أو « إذا كان ق فإن ك »

انطلاقا من تعريف الاستلزام نحصل على جدول الحقيقة المجاور .

ق	ك	ق ⇐ ك
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

نلاحظ أن : ($ق \Leftarrow ك$) تكون خاطئة في حالة واحدة فقط عندما تكون ق صحيحة و ك خاطئة .

أمثلة :

ـ القضايا التالية صحيحة :

« $2 > 3 \Rightarrow 2^2 = 4$ »

« $2 > 3 \Rightarrow 2^2 = 5$ »

« $2^2 = 5 \Rightarrow 2 > 3$ »

(في سنة 1980 بلغ عدد سكان الجزائر مائة مليون نسمة) ⇐ (الجزائر دولة إفريقية).

ـ القضيتان التاليتان خاطئتان :

« $2^2 = 4 \Rightarrow 2 > 3$ »

(الجزائر دولة إفريقية) ⟸ (في سنة 1980 بلغ عدد سكان الجزائر مائة مليون نسمة)

عكس استلزام :

يسمى الاستلزام (ك ⟸ ق) عكس الاستلزام (ق ⟸ ك).

العكس النقيض لاستلزام :

يسمى الاستلزام ($\overline{\text{ك}}$ ⟸ $\overline{\text{ق}}$) العكس النقيض للاستلزام (ق ⟸ ك) .

التكافؤ المنطقي :

لتكن ق و ك قضيتين .
تسمى القضية (ق ⟸ ك) ∧ (ك ⟸ ق) تكافؤا منطقيا ويرمز إليها بالرمز (ق ⟺ ك) .

يقرأ (ق ⟺ ك) : « ق يكافيء منطقيا ك » أو « ق إذا وفقط إذا ك ».
نلاحظ في جدول الحقيقة التالي أن (ق ⟺ ك) صحيحة في حالتين فقط : عندما تكون ق و ك صحيحتين معا أو خاطئتين معا .

ق⟺ك	ك⟸ق	ق⟸ك	ك	ق
1	1	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

أمثلة :

1 ـ التكافؤات التالية صحيحة .

- (قطرا المستطيل أ ب حـ د متعامدان) $\Longleftrightarrow$ (أ ب حـ د مربع).
- (انعقد مؤتمر الصومام يوم 20 أوت 1956.) $\Longleftrightarrow$ (استشهد البطل الجزائري مصطفى بن بلعيد يوم 26 مارس 1956.)
- « $2^2 = 5$ » $\Longleftrightarrow$ « $2^2 > 4$ ».

2 ـ التكافؤات التالية خاطئة .

- «(عدد أيام الأسبوع هو 10) $\Longleftrightarrow$ (العدد 10 زوجي)»
- «بغداد عاصمة العراق $\Longleftrightarrow$ كل مستطيل هو مربع».

خواص :

باستعمال جداول الحقيقة يمكن التأكد من صحة الخواص التالية :

- $\overline{\overline{\text{و}}} \Longleftrightarrow \text{و}$
- $\text{و} \wedge \text{و} \Longleftrightarrow \text{و}$
- $\text{و} \vee \text{و} \Longleftrightarrow \text{و}$
- $\text{و} \wedge \text{ك} \Longleftrightarrow \text{ك} \wedge \text{و}$ (الرابطة $\wedge$ تبديلية)
- $\text{و} \vee \text{ك} \Longleftrightarrow \text{ك} \vee \text{و}$ (الرابطة $\vee$ تبديلية)
- $\text{و} \wedge (\text{ك} \wedge \text{ل}) \Longleftrightarrow (\text{و} \wedge \text{ك}) \wedge \text{ل}$ (الرابطة $\wedge$ تجميعية)
- $\text{و} \vee (\text{ك} \vee \text{ل}) \Longleftrightarrow (\text{و} \vee \text{ك}) \vee \text{ل}$ (الرابطة $\vee$ تجميعية)
- $\text{و} \wedge (\text{ك} \vee \text{ل}) \Longleftrightarrow (\text{و} \wedge \text{ك}) \vee (\text{و} \wedge \text{ل})$ ($\wedge$ توزيعية بالنسبة إلى $\vee$)
- $\text{و} \vee (\text{ك} \wedge \text{ل}) \Longleftrightarrow (\text{و} \vee \text{ك}) \wedge (\text{و} \vee \text{ل})$ ($\vee$ توزيعية بالنسبة إلى $\wedge$)
- $(\text{و} \Rightarrow \text{ك}) \wedge (\text{ك} \Rightarrow \text{ل}) \Longrightarrow (\text{و} \Rightarrow \text{ل})$ ($\Longrightarrow$ متعدّي)

• $(ق \Rightarrow ك) \wedge (ك \Rightarrow ل) \Rightarrow (ق \Rightarrow ل)$ ($\Longrightarrow$ متعدّي)

• $\overline{ق \wedge ك} \Leftrightarrow \overline{ق} \vee \overline{ك}$ (نفي الوصل)

• $\overline{ق \vee ك} \Leftrightarrow \overline{ق} \wedge \overline{ك}$ (نفي الفصل)

• $(ق \Rightarrow ك) \Leftrightarrow (\overline{ك} \Rightarrow \overline{ق})$ (قاعدة العكس النقيض)

تمارين محلولة

1 ـ لتكن ق و ك قضيتين .

أثبت صحة التكافؤ التالي : $\overline{(ق \Rightarrow ك)} \Leftrightarrow (ق \wedge \overline{ك})$.

طريقة أولى :

باستعمال جداول الحقيقة نحصل على الجدول التالي :

ق	ك	$ق \Rightarrow ك$	$\overline{ق \Rightarrow ك}$	$\overline{ك}$	$ق \wedge \overline{ك}$	$\overline{(ق \Rightarrow ك)} \Leftrightarrow (ق \wedge \overline{ك})$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

إذن $\overline{(ق \Rightarrow ك)} \Longleftrightarrow (ق \wedge \overline{ك})$

طريقة ثانية :

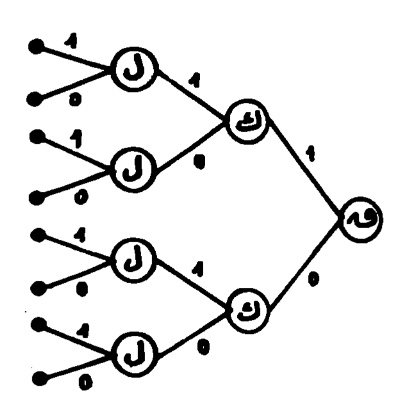
$\overline{(ق \Rightarrow ك)} \Leftrightarrow \overline{(\overline{ق} \vee ك)}$ **(تعريف الاستلزام)**

$\overline{(\overline{ق} \vee ك)} \Leftrightarrow (\overline{\overline{ق}}) \wedge \overline{ك}$ **(نفي الفصل)**

$\overline{\overline{ق}} \wedge \overline{ك} \Leftrightarrow ق \wedge \overline{ك}$ **(لأن $\overline{\overline{ق}} \Leftrightarrow ق$)**

إذن $\overline{(ق \Rightarrow ك)} \Leftrightarrow ق \wedge \overline{ك}$ ($\Leftrightarrow$ متعدّي).

2 ـ لتكن و ـ ك ـ ل ثلاث قضايا . باستعمال جداول الحقيقة أثبت أن : (و ∧ ك) ⇐ ل) ⟺ (و ⇐ (ك ⇐ ل)).



كل قضية تكون إما صحيحة (ونرمز إليها بالرمز 1) وإما خاطئة (ونرمز إليها بالرمز 0).

بما أن لدينا ثلاث قضايا فإننا نحصل على 8 حالات ممكنة كما هو موضح في الشكل المجاور . وعندئذ يكون جدول الحقيقة للقضية :

« ((و ∧ ك) ⇐ ل) ⟺ (و ⇐ (ك ⇐ ل)) » كما يلي :

و	ك	ل	و∧ك	(و∧ك)⇐ل	ك⇐ل	و⇐(ك⇐ل)	[(و∧ك)⇐ل]⟺[و⇐(ك⇐ل)]
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

إذن القضية " ((و ∧ ك) ⇐ ل) ⟺ (و ⇐ (ك ⇐ ل))" صحيحة .

2 الجمل المفتوحة والمكمات

1 ـ الجمل المفتوحة :

ليكن س عددًا طبيعيا. الجملة « س < 5 » ليست قضية لأنه لا يمكننا أن نقول عنها إنها صحيحة أو خاطئة لأن قيمة س غير معروفة.

لكن إذا استبدل س بعدد طبيعي معيّن تصبح هذه الجملة قضية.
مثلا إذا استبدل س بالعدد 2 نحصل على القضية الصحيحة « 2 < 5 »
وإذا استبدل س بالعدد 10 نحصل على القضية الخاطئة « 10 < 5 »
تسمى الجملة « س < 5 » جملة مفتوحة معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية ط ويدعى س متغير الجملة المفتوحة.

تعريف :

نسمي جملة مفتوحة معرفة على مجموعة س~ كلَّ جملة تحتوي على المتغير س والتي تصبح قضية إذا استبدل س بأي عنصر من عناصر س~ .

نرمز إلى الجملة المفتوحة ذات المتغيّر س بالرمز ق (س) أو ك (س) ...

ملاحظة :

كما عرفنا الجملة المفتوحة ذات المتغير الواحد س يمكننا أن نعرّف وبنفس الطريقة ، الجملة المفتوحة ذات المتغيرين س ، ع .
مثلاً إذا كان س و ع عددين طبيعيّين فإن « س + ع = 4 » هي جملة مفتوحة ذات المتغيرين س و ع .

• **خواص :**

نقبل أن الخواص المتعلقة بالقضايا تبقى صحيحة بالنسبة إلى الجمل المفتوحة .

مثلا إذا كانت ق (س) . ك (س) و ل (س) جملا مفتوحة معرفة على س .

فإن :

- ق (س) ∧ ق (س) ⟺ ق (س)
- [ق (س) ∧ ك (س)] ∧ ل (س) ⟺ ق (س) ∧ [ك (س) ∧ ل (س)]
- ق (س) ∨ ق (س) ⟺ ق (س)
- [ق (س) ∨ ك (س)] ∨ ل (س) ⟺ ق (س) ∨ [ك (س) ∨ ل (س)]
- ق (س) ∧ ك (س) ⟺ ك (س) ∧ ق (س)
- ق (س) ∧ [ك (س) ∨ ل (س)] ⟺ [ق (س) ∧ ك (س)] ∨ [ق (س) ∨ ل (س)]
- ق (س) ∨ ك (س) ⟺ ك (س) ∨ ق (س)
- ق (س) ∨ [ك (س) ∧ ل (س)] ⟺ [ق (س) ∨ ك (س)] ∧ [ق (س) ∨ ل (س)]
- $\overline{\text{ق (س) ∧ ك (س)}}$ ⟺ $\overline{\text{ق (س)}}$ ∨ $\overline{\text{ك (س)}}$
- $\overline{\text{ق (س) ∨ ك (س)}}$ ⟺ $\overline{\text{ق (س)}}$ ∧ $\overline{\text{ك (س)}}$
- [ق (س) ⇐ ك (س)] ∧ [ك (س) ⇐ ل (س)] ⇐ [ق (س) ⇐ ل (س)]
- [ق (س) ⟺ ك (س)] ∧ [ك (س) ⟺ ل (س)] ⇐ [ق (س) ⟺ ل (س)]

2 ـ المكمات :

لتكن ق (س) جملة مفتوحة معرفة على مجموعة سـ .

• إذا كانت ق (س) **صحيحة من أجل كل عنصر** س من سـ :
نكتب : ∀ س ∈ سـ : ق (س).
ونقرأ : «من أجل كل عنصر س من سـ ق (س)»
أو « مهما كان العنصر س من سـ ق (س)».
الرمز ∀ يسمى المكمم الكلّي .

• إذا وجد ، **على الأقل عنصر** س من سـ بحيث تكون ق (س) **صحيحة**
نكتب : E س ∈ سـ : ق (س).
ونقرأ : «يوجد ، على الأقل ، عنصر س من سـ ق (س)» الرمز E يسمى المكمم الوجودي .

نلاحظ أن الجمل من الشكل (E س ∈ سـ : ق(س))
و [∀ س ∈ سـ : ق (س)] هي قضايا لأنه يمكننا التأكد من صحتها أو خطئها .

أمثلة :

لتكن ط مجموعة الأعداد الطبيعية .

ـ القضايا التالية صحيحة :

∀ س ∈ ط : س + 0 = س

E س ∈ ط : س = 12

∀ س ∈ ط ؛ E ع ∈ ط : س < ع

ـ القضايا التالية خاطئة :

∀ س ∈ ط : س + 4 = 2 س

E س ∈ ط : 3 س = 5

E ع ∈ ط ∀ س ∈ ط : س < ع

3 ـ قواعد استعمال المكممات :

الرمزان ∀ و E خاصان بالمنطق ولا يجوز استعمالهما قصد الاختصار ويخضع استعمالهما إلى قواعد مضبوطة ، تمكن من صياغة جمل رياضية واضحة ودقيقة .

وهذه بعض قواعد استعمالهما :

- يوضعان في بداية القضية .
- في القضايا المكممة التي تشمل المتغيّر س من المجموعة سـ يمكن تبديل س بأي حرف آخر لا يدل على عنصر ثابت من سـ .

  فمثلا يمكن كتابة القضية (E س ∋ ط : س^2 = 4)

  على الشكل : (E ع ∋ ط : ع^2 = 4)

  أو (E م ∋ ط : م^2 = 4)

  لكن لا يجوز أن نكتب : (E 2 ∋ ط : 2^2 = 4)
- رأينا أن القضية (∀ س ∋ ط ، E ع ∋ ط : س < ع) صحيحة بينما القضية (E ع ∋ ط ، ∀ س ∋ ط : س < ع) خاطئة .

  إذن ترتيب المكمين ∀ و E هام .

4 ـ نفي قضية مكممة :

نقبل أن :

- نفي القضية (∀ س ∋ سـ : ق (س))

  هو القضية (E س ∋ سـ : $\overline{\text{ق (س)}}$)
- نفي القضية (E س ∋ سـ ، ق (س))

  هو القضية (∀ س ∋ سـ : $\overline{\text{ق (س)}}$)
- نفي القضية [∀ س ∋ سـ ، E ع ∋ عـ : ق (س،ع)] هو القضية

  [E س ∋ سـ ، ∀ ع ∋ عـ : $\overline{\text{ق (س،ع)}}$]

• نفي القضية [E س ∋ س، ∀ع ∋ ع : ف (س،ع)] هو القضية

$\overline{[\forall \text{ س} \ni \text{س}،\ E\text{ع} \ni \text{ع} : \text{ف}(\text{س}،\text{ع})]}$

بصفة عامة :

يتم نفي قضية مكممة باستبدال الرمز ∀ بالرمز E وإستبدال الرمز E بالرمز ∀ ونفي الجملة المفتوحة التي تلي المكممين.

أمثلة :

• لتكنْ القضية (كل عدد طبيعي زوجي).
يمكن كتابتها على الشكل : (∀ س ط : س زوجي) ويكون نفيها :
(E س ∋ ط : س غير زوجي). أي (يوجد ، على الأقل عدد طبيعي غير زوجي).

• لتكن القضية (يوجد عدد طبيعي مربعه 5) يمكن كتابتها على الشكل :
(E س ∋ ط : $\text{س}^2 = 5$) ويكون نفيها : (∀ س ∋ ط : $\text{س}^2 \neq 5$)
أي (مربع أي عدد طبيعي يختلف عن 5).

• لتكن القضية (يوجد عدد طبيعي أكبر من أي عدد طبيعي) يمكن كتابتها على الشكل : (E س ∋ ط ، ∀ع ∋ ط : ع < س) ويكون نفيها :
(∀ س ∋ ط ؛ E ع ∋ ط : ع ⩾ س).

3 المنطق والمجموعات

1 ـ المجموعات والجمل المفتوحة :

لتكن ق (س) جملة مفتوحة معرفة على مجموعة سـ

نقبل بوجود مجموعة **ل** معرفة كما يلي : **ل** = { س ∋ سـ ، ق (س) صحيحة }

ونكتب اصطلاحا **ل** = { س ∋ سـ ، ق (س) }

مثلا : إذا كانت سـ هي مجموعة الاعداد الصحيحة صـ و ق (س) الجملة المفتوحة « | س | ⩽ 2 »

تكون ل = { س ∋ ص ، | س | ⩽ 2 }

إذن ل = { − 2 ، − 1 ، 0 ، 1 ، 2 }

2 ـ العمليات على المجموعات :

لتكن ا و ب مجموعتين جزئيتين من مجموعة سـ ، معيّنتين على الترتيب بالجملتين المفتوحتين ق (س) و ك (س).

ا = { س ∋ سـ ، ق (س) } ،

ب = { س ∋ سـ : ك (س) }

نذكر فيما يلي بعض التعاريف المعروفة والمتعلقة بالمجموعات وصياغتها باستعمال الرموز المنطقية .

- **متممة مجموعة جزئية :**

التعريف المعروف : $ت_{سـ}$ ا = { س ∋ سـ وَ س ∌ ا }

الصياغة الجديدة : $ت_{سـ}$ ا = { س ∋ سـ ، $\overline{\text{ق (س)}}$ }

- **مجموعة تقاطع مجموعتين :**

التعريف المعروف : ا ∩ ب = { س ∋ سـ ، س ∋ ا وَ س ∋ ب }

الصياغة الجديدة : ا ∩ ب = { س ∋ سـ ، ق (س) ∧ ك (س) }

• **مجموعة اتحاد مجموعتين :**

التعريف المعروف : $أ \cup ب = \{ س \in سـ ، س \in أ$ أو $س \in ب \}$

الصياغة الجديدة : $أ \cup ب = \{ س \in سـ ، ق (س) \vee ك (س) \}$

الإحتواء :

التعريف المعروف : $(أ \subset ب) \Leftrightarrow$ (كل عنصر من أ ينتمي إلى ب)

الصياغة الجديدة :

$(أ \subset ب) \Leftrightarrow (\forall س \in سـ ، ق (س) \Rightarrow ك (س))$

تساوي مجموعتين :

التعريف المعروف : $(أ = ب) \Leftrightarrow (أ \subset ب)$ وَ $(ب \subset أ)$

الصياغة الجديدة :

$(أ = ب) \Leftrightarrow (\forall س \in سـ ، ق (س) \Leftrightarrow ك (س))$

الخواص المتعلقة بالعمليات على المجموعات تنتج من خواص الروابط المنطقية .

مثلا : إذا كانت أ،ب،حـ ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة سـ

$\overline{أ}$ متممة أ في سـ ، $\overline{ب}$ متممة ب في سـ ، فإن :

• $أ \cap أ = أ$ • $أ \cap (ب \cap حـ) = (أ \cap ب) \cap حـ$

• $أ \cup أ = أ$ • $أ \cup (ب \cup حـ) = (أ \cup ب) \cup حـ$

• $أ \cap ب = ب \cap أ$ • $أ \cap (ب \cup حـ) = (أ \cap ب) \cup (أ \cap حـ)$

• $أ \cup ب = ب \cup أ$ • $(أ \cup (ب \cap حـ) = (أ \cup ب) \cap (أ \cup حـ)$

• $\overline{(أ \cap ب)} = \overline{أ} \cup \overline{ب}$ • $(أ \subset ب) \wedge (ب \subset حـ) \Rightarrow (أ \subset حـ)$

• $\overline{أ \cup ب} = \overline{أ} \cap \overline{ب}$ • $(أ = ب) \wedge (ب = حـ) \Rightarrow (أ = حـ)$

3 ـ الفرق بين مجموعتين :

نسمي الفرق بين المجموعة أ والمجموعة ب المجموعة التي نرمز إليها بالرمز (أ − ب) والمكونة من العناصر التي تنتمي إلى أ ولا تنتمي إلى ب .

$$ا - ب = \{س ، س \in ا \text{ و } س \notin ب\}$$

مثال : إذا كان :

$$ا = \{0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5\}$$

و

$$ب = \{1 ، 3 ، 5 ، 7\}$$

فإن :

$$ا - ب = \{0 ، 2 ، 4\}$$

و

$$ب - ا = \{7\}$$

4 ـ الفرق التناظري لمجموعتين :

> نسمي الفرق التناظري للمجموعتين ا و ب المجموعة التي نرمز إليها بالرمز (ا Δ ب) والمعرفة كما يلي :
>
> $ا \Delta ب = \{س ، (س \in ا \wedge س \notin ب) \vee (س \notin ا \wedge س \in ب)\}$.

نلاحظ أن :

المجموعة ا Δ ب مكونة من العناصر التي تنتمي اما إلى ا وإما إلى ب أي $ا \Delta ب = (ا - ب) \cup (ب - ا)$.

مثال :

اذا كان : $ا = \{-2 ، -1 ، 0 ، 1 ، 2\}$

$ب = \{0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4\}$

فإن : $ا \Delta ب = \{-2 ، -1 ، 3 ، 4\}$

5 ـ مجموعة أجزاء مجموعة :

إذا كانت سـ مجموعة ، نقبل بوجود مجموعة عناصرها هي أجزاء المجموعة سـ .

تسمى هذه المجموعة مجموعة أجزاء المجموعة سـ . نرمز إليها بالرمز ج (سـ).

مثلا مجموعة أجزاء المجموعة {أ ب حـ} هي المجموعة

{φ ، {أ} ، {ب} ، {حـ} ، {أ ب} ، {أ ، حـ} ، {ب ، حـ} ، {أ ، ب . حـ}}

6 ـ التجزئة :

نسمي تجزئة لمجموعة غير خالية سـ كلَّ مجموعة من أجزاء المجموعة سـ التي تحقق الشروط التالية : **1 ـ كل عنصر من التجزئة غير خالٍ .** **2 ـ كل عناصر التجزئة منفصلة مثنى مثنى .** **3 ـ اتحاد عناصر التجزئة يساوي المجموعة سـ.**

مثال :

لتكن المجموعة سـ = {1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6}

إن المجموعتين { {1 ، 3 ، 5} ، {2 ، 4 ، 6} }

و { {1 ، 2} ، {3 ، 4} ، {5 ، 6} }

تجزئتان للمجموعة سـ .

أما المجموعة { {1 ، 2 ، 4 ، 6} ، {1 ، 3 ، 5} } ، فليست تجزئة للمجموعة سـ .

7 ـ تمارين محلولة

1) سـ و ع **مجموعتان. اثبت أن** : (سـ ∪ ع = سـ) ⟸ (ع ⊂ سـ)
لكي نبرهن الاستلزام (سـ ∪ ع = سـ ⟸ ع ⊂ سـ) يكفي أن نبرهن
أن (ع ⊂ سـ) علما أن (سـ ∪ ع = سـ)
ليكن س ∈ ع ولنبرهن أن س ∈ سـ

س ∈ ع ⟸ س ∈ سـ ∪ ع   (لأن ع ⊂ سـ ∪ ع)
س ∈ سـ ∪ ع ⟸ س ∈ سـ   (لأن سـ ∪ ع = سـ)
إذن س ∈ ع ⟸ س ∈ سـ   (الإستلزام متعدي)

2) **لتكن** ج (سـ) **مجموعة أجزاء المجموعة** سـ ، ج (ع) **مجموعة أجزاء المجموعة** ع **و** ج (سـ ∩ ع) **مجموعة أجزاء المجموعة** (سـ ∩ ع).
اثبت أن : ج (سـ ∩ ع) = ج (سـ) ∩ ج (ع).

ا ∈ ج (سـ ∩ ع) ⟺ ا ⊂ (سـ ∩ ع) (حسب تعريف ج (سـ ∩ ع).
ا ⊂ (سـ ∩ ع) ⟺ (ا ⊂ سـ) ∧ (ا ⊂ ع) (باستعمال تعريفي الإحتواء والتقاطع).
(ا ⊂ سـ) ∧ (ا ⊂ ع) ⟺ ا ∈ ج (سـ) ∧ ا ∈ ج (ع) (حسب تعريفي ج (سـ) و ج (ع)).
ا ∈ ج (سـ) ∧ ا ∈ ج (ع) ⟺ ا ∈ (ج (سـ) ∩ ج (ع)). (حسب تعريف التقاطع).
إذن : ا ∈ ج (سـ ∩ ع) ⟺ ا ∈ ج (سـ) ∩ ج (ع) (التكافؤ متعدي)
ومنه ج (سـ ∩ ع) = ج (سـ) ∩ ج (ع).

3) عين مجموعة أجزاء المجموعة {△ ، ★ ، ○ ، ☆}

نريد تشكيل جميع أجزاء المجموعة {△ ، ★ ، ○ ، ☆}

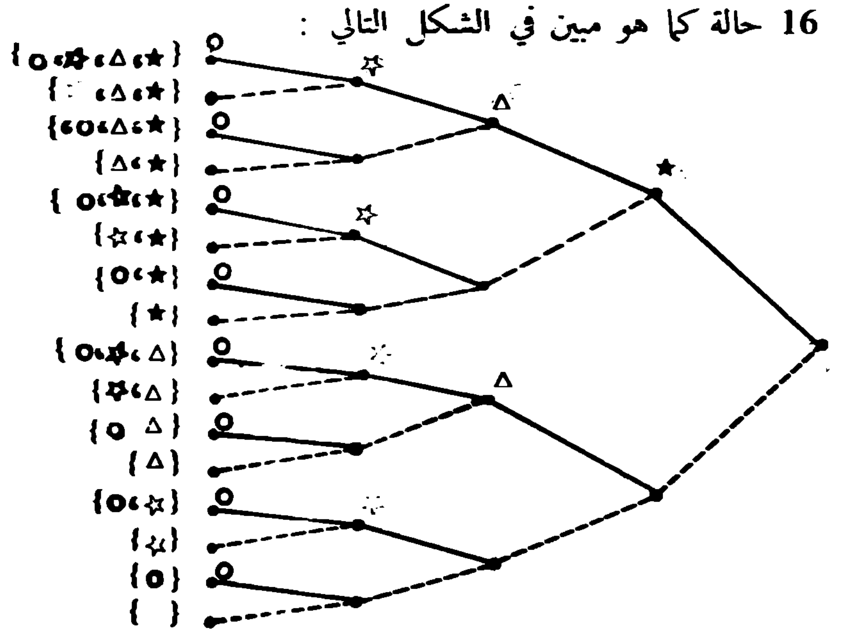
لتشكيل جزء ما نتبع الطريقة التالية :

لنأخذ عنصرا ، مثلا ★ فهو إما ينتمي إلى الجزء الذي نريد تشكيله وإما لا ينتمي إليه . ونمثل ذلك بخط مستمر في حالة الإنتماء وبخط غير مستمر في حالة عدم الإنتماء .

لنأخذ عنصرا ثانيا ، مثلا △ فهو إما ينتمي إلى الجزء الذي نريد تشكيله وإما لا ينتمي إليه وهذا في كل حالة من الحالتين السابقتين ونمثل ذلك كما سبق . فنحصل بذلك على أربع حالات .

لنأخذ الآن عنصرا ثالثا ، مثلا ☆ فهو إما ينتمي إلى الجزء الذي نريد تشكيله وإما لا ينتمي إليه . وهذا في كل حالة من الحالات الأربع السابقة فنحصل على 8 حالات .

وأخيرا العنصر ○ فهو إما ينتمي إلى الجزء الذي نريد تشكيله وإما لا ينتمي إليه وهذا في كل حالة من الحالات الثماني السابقة فنحصل على 16 حالة كما هو مبين في الشكل التالي :



إذن أجزاء المجموعة {△ ، ★ ، ○ ، ☆} هي :

{★ ، △ ، ☆ ، ○} ، {★ ، △ ، ☆} ، {★ ، △ ، ○} ،

{★ ، △} ، {★ ، ☆ ، ○} ، {★ ، ☆} ، {★ ، ○} ، {★} ،

{△ ، ☆ ، ○} ، {△ ، ☆} ، {△ ، ○} ، {△} ، {☆ ، ○} ،

{☆} ، {○} ، { } .

ملاحظة :

لقد رأينا في مثال سابق أن عدد أجزاء المجموعة ،{أ،ب،ح} التي تشمل ثلاثة عناصر هو 8 أي 2^3 وفي هذا التمرين ، رأينا أن عدد أجزاء المجموعة {△ ،☆ ، ★ ، ○} التي تشمل أربعة عناصر هو 16 أي 2^4 ويمكن تعميم هذه النتيجة كما يلي :

إذا كان عدد عناصر مجموعة هو ن فإن عدد أجزائها هو $2^{ن}$.

---

4 أنماط البرهان

1 ـ الاستنتاج : هو استدلال يعتمد على القاعدة التالية :

إذا كانت و صحيحة و $(و \Rightarrow ك)$ صحيحة فإن ك صحيحة

بالفعل . إذا كانت و صحيحة و $(و \Rightarrow ك)$ صحيحة فحسب جدول الحقيقة للاستلزام تكون ك صحيحة .

مثال : أ ب ح د متوازي أضلاع قطراه [أ ح] و [ب د]

نعلم أن الاستلزام التالي صحيح .

[(أ ح = ب د) $\Longleftarrow$ (أ ب ح د مستطيل)] لكي نبرهن أن أ ب ح د مستطيل يكفي أن نتأكد أن أ ح = ب د .

2 ـ البرهان بالخلف :

لكي نبرهن صحة قضية و يمكن أن نتبع الطريقة التالية :

نفرض أن $\overline{و}$ صحيحة ونبين أن هذا يؤدي إلى تناقض . عندئذ تكون و صحيحة .

مثال : ليكن ن عددًا طبيعيا . اثبت أن : $\sqrt{ن^{2}+1} \geqslant ن$

نفرض أن $\sqrt{ن^{2}+1} < ن$ وبتربيع طرفي المتباينة نحصل على :

$ن^{2}+1 < ن^{2}$

وبعد الاختزال يكون $1 < 0$ وهذا تناقض

إذن $\sqrt{ن^{2}+1} \geqslant ن$.

3 ـ البرهان باستعمال العكس النقيض :

نعلم أن القضيتين $(و \Rightarrow ك)$ و$(\overline{ك} \Rightarrow \overline{و})$ متكافئتان .

لكي نبرهن صحة $(و \Rightarrow ك)$ يكفي أن نبرهن صحة $(\overline{ك} \Rightarrow \overline{و})$

مثال : ليكن س عددا حقيقيا . اثبت أن :

(س² + س − 8 = 0) ⟸ (س ≠ 2).

لكي نبرهن أن (س² + س − 8 = 0) ⟸ (س ≠ 2)

يكفي أن نبرهن أن (س = 2) ⟸ (س² + س − 8 ≠ 0)

وهذا محقق لأن : 2² + 2 − 8 ≠ 0.

إذن : (س² + س − 8 = 0) ⟸ (س ≠ 2) .

4 ـ البرهان بمثال مضاد :

تعلم أن نفي القضية « ∀ س ∈ سـ ، ق (س) » هو القضية « ∃ س ∈ سـ ، ق̄ (س) ». إذن

لكي نبرهن عدم صحة القضية « ∀ س ∈ سـ ، ق(س) » يكفي أن نجد عنصرا $س_0$ بحيث تكون ق($س_0$) خاطئة .

مثالان :

1) لكي نبرهن عدم صحة القضية « ∀ س ∈ ط ، س² = 2^س » يكفي أن نجد عنصرا ن من المجموعة ط بحيث ن² ≠ 2^ن

بالفعل ، إذا أخذنا ن = 3 فإن ن² ≠ 2^ن

إذن القضية « ∀ س ∈ ط ، س² = 2^س » خاطئة .

2) لكي نبرهن عدم صحة القضية التالية :

« ∀ ن ∈ ط ، (ن مضاعف 2) ∧ (ن مضاعف 4) ⟸ (ن مضاعف 8) »

يكفي أن نجد عنصرا $ن_0$ يجعل الاستلزام التالي خاطئا : ($ن_0$ مضاعف 2) ∧ ($ن_0$ مضاعف 4) ⟸ ($ن_0$ مضعاف 8) بالفعل ، إذا أخذنا $ن_0$ = 12

فإن الاستلزام

« 12 مضاعف 2) ∧ (12 مضاعف 4) ⟸ (12 مضاعف 8) »

خاطئ .

18 ـ لتكن المجموعة سـ حيث سـ = {1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9}

ا و ب مجموعتان جزئيتان من سـ حيث :

ا = {2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 9}

ب = {1 ، 4 ، 5 ، 7 ، 8}

أثبت أن المجموعة {ا ∩ ب ، ا △ ب ، $ت_{سـ}$ (ا ∪ ب)}

تجزئة للمجموعة سـ .

19 ـ ا و ب مجموعتان غير خاليتين.

1 ـ أثبت أن المجموعات ا ∩ ب ، ا − ب ، ب − ا

منفصلة مثنى مثنى .

2 ـ أثبت أن : (ا ∩ ب) ∪ (ا − ب) ∪ (ب − ا) = ا ∪ ب

هل المجموعة {(ا ∩ ب)، (ا − ب) ، (ب − ا)} تجزئة للمجموعة ا ∪ ب ؟

3 ـ تطبيق : أجب عن السؤالين السابقين في الحالتين :

1 ـ ا = {1 ، 3} ، ب = {2 ، 4 ، 6}

2 ـ ا = {1 ، 2 ، 3 ، 5} ، ب = {2 ، 4 ، 5 ، 6}

20 ـ لتكن المجموعة سـ حيث سـ = {1، 2، 3، 4، 5}

1 ـ عين مجموعة أجزاء المجموعة سـ

2 ـ عين كل التجزئات للمجموعة سـ والتي تشمل {1، 2، 4}

3 ـ عين بعض التجزئات للمجموعة سـ والتي تشمل عنصرين على الأقل وثلاثة عناصر على الأكثر.

أنماط البرهان :

21 ـ أثبت أن الاستلزام التالي غير صحيح :

$\forall$ س ∈ ص : س > 3 ⇐ س^2 > 9

22 ـ س عدد حقيقي و حـ عدد حقيقي موجب .

نعلم أن |س| > حـ ⇔ − حـ > س > حـ

أثبت أن : (|ا| > 1 و |ب| > 1) ⇐ (ا ب + 1 ≠ 0)

2 ـ ا و ب عددان صحيحان . أثبت أن :

(ا $\neq$ − 1 و ب $\neq$ − 1) $\Longleftarrow$ (ا + ب + ا ب + 1 $\neq$ 0)

24 ـ ن عدد طبيعي . أثبت أن الاستلزام التالي صحيح :

(ن² زوجي) $\Longleftarrow$ (ن زوجي).

25 ـ ا و ب مجموعتان . أثبت أن :

(ا − ب) ∩ ب = ϕ

26 ـ تمثل الحروف ا، ب ، حـ ثلاثة أشخاص كل شخص من هؤلاء الأشخاص يمارس مهنة واحدة وواحدة فقط من المهن التالية : التعليم ـ الطب ـ التجارة .

نفرض أن القضايا التالية صحيحة .

(1) (ا معلم) $\Longleftarrow$ (ب طبيب)

(2) (ا طبيب) $\Longleftarrow$ (ب تاجر)

(3) (ب ليس معلما) $\Longleftarrow$ (ا طبيب)

(4) (حـ تاجر) $\Longleftarrow$ (ا طبيب)

استنتج مهنة كل واحد من ا، ب، حـ .

27 ـ ابحث عن الخطأ في الاستدلال التالي :

نعتبر في مجموعة الأعداد الحقيقية ح، المعادلة الآتية :

س² + س + 1 = 0 (I)

نستنتج أن :

س² + (س + 1) = 0 و س (س + 1) + 1 = 0

ثم س + 1 = − س² و س (− س²) + 1 = 0

اذن س³ = 1

ومنه س = 1

وبتعويض س بالقيمة 1 في العلاقة (I)

نحصل على : 3 = 0

الباب الثاني

أنشطة حول الحساب العددي

لقد دُرِستْ واستْعمِلتْ في السنوات السابقة مجموعة الأعداد الحقيقية ح ومجموعاتها الجزئية : ط (مجموعة الأعداد الطبيعية) ، ص (مجموعة الأعداد الصحيحة) ، ك (مجموعة الأعداد الناطقة) .
نذكّر في هذا الباب بعض الخواص المتعلقة بالحساب في هذه المجموعات .
تقدّم هذه الخواص ، في بداية العام الدراسي ، بهدف توضيح العناصر الأساسية في الحساب ويتم الرجوع إليها كلما سنحت الفرصة لتدريب التلاميذ على التحكم أكثر في آليات الحساب دون التوسع في الدراسة النظرية .

5 القواسم والمضاعفات

1 ـ قواسم ومضاعفات عدد طبيعي :

• **تعريف**

ليكن أ ، ب عددين طبيعيين ، ب يختلف عن 0 .
إذا وجد عدد طبيعي ن حيث : أ = ب × ن
نقول إن : أ مضاعف للعدد ب

أو أ يقبل القسمة على ب

أو ب قاسم للعدد أ

أو ب يقسم أ

أمثلة :

• 15 = 3 × 5 . إذن 15 مضاعف للعدد 3
15 مضاعف للعدد 5
• 10 ليس مضاعفا للعدد 3 .
3 ليس مضاعفا للعدد 10 .
• كل عدد زوجي مضاعف للعدد 2 .

2 ـ الأعداد الأولية :

• **تعريف**

نقول عن عدد طبيعي إنه أولي اذا كان عدد قواسمه إثنين .

مثلا :

- 2 ، 3 ، 5 ، 7 هي أعداد طبيعية أولية .
- 4 ، 6 ، 9 ، 15 هي أعداد طبيعية غير أولية .
- العدد 1 ليس أوليا لأن له قاسما واحدا فقط هو 1 .
- العدد 0 ليس أوليا لأن له أكثر من قاسمين .

3 ـ تحليل عدد طبيعي غير أولي إلى جُداء عوامل أولية :

كل عدد طبيعي غير أولي وأكبر من 1 يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية

مثال :

- لتحليل العدد 792 إلى جُداء عوامل أولية نتبع الطريقة الآتية :

792	2
396	2
198	2
99	3
33	3
11	11
1	

$792 = 2 \times 396$

$396 = 2 \times 198$

$198 = 2 \times 99$

$99 = 3 \times 33$

$33 = 3 \times 11$

$11 = 1 \times 11$

ونكتب : $792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$

قاعدة :

ليكن أ ، ب عددين طبيعيين كل منهما أكبر من 1 . يكون العدد ب قاسما للعدد أ إذا وفقط إذا كان كل عامل من العوامل الأولية في تحليل ب موجوداً في تحليل أ وبأس إما مساوٍ وإما أكبر من أسه في تحليل ب .

مثال : $أ = 2^3 \times 3^5 \times 7^2 \times 11$

$ب = 2 \times 3^5 \times 7$

$حـ = 2^4 \times 3^2 \times 5$

العدد الطبيعي ب هو قاسم للعدد الطبيعي أ .

العدد الطبيعي حـ ليس قاسما للعدد الطبيعي أ .

4 ـ القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد طبيعية :

1.4 ـ قاعدة

للحصول على القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد طبيعية كل منها أكبر من 1 :

- نحلل كلا من هذه الأعداد إلى جُداء عوامل أولية .
- نحسب جُداء العوامل الأولية المشتركة بين تحليلات هذه الأعداد حيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة فقط وبأصغر أس .

مثال 1 :

- لنبحث عن القاسم المشترك الأكبر للأعداد 720 ، 1512 ، 1800

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

$1512 = 2^3 \times 3^3 \times 7$

$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$

- نحسب جُداء العوامل الأولية المشتركة بين هذه التحليلات حيث يؤخذ كل عامل مرة واحدة وبأصغر أس فنحصل على $2^3 \times 3^2 = 72$

إذن القاسم المشترك الأكبر للأعداد 720 ، 1512 ، 1800 هو 72.

إذا رمزنا إلى القاسم المشترك الأكبر بالرمز : ق م أ

نكتب : ق م أ (720 ، 1512 ، 1800) = 72 . .

مثال 2 :

نعتبر العددين 20 و 21 ولنبحث عن قاسمهما المشترك الأكبر.

تحليل هذين العددين إلى جداء عوامل أولية :

$20 = 2^2 \times 5$

$21 = 3 \times 7$

نلاحظ أن تحليلي العددين 20 و 21 إلى جداء عوامل أولية لا يحتويان على عوامل أولية مشتركة بينهما.

في هذه الحالة يكون العدد 1 هو القاسم الوحيد للعددين 20 و 21 .

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 21 و 20 هو 1 .

2.4 ـ العددان الطبيعيان الأوليان فيما بينهما :

• **تعريف**

نقول عن العدد الطبيعي ا إنه أولي مع العدد الطبيعي ب إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر هو 1 .

يقال أيضا إن ا ، ب أوليان فيما بينهما .

أمثلة :

- العددان الطبيعيان 14 ، 15 أوليان فيما بينهما .
- العددان الطبيعيان 14 ، 8 غير أوليين فيما بينهما .
- العدد 1 أولي مع أي عدد طبيعي آخر .

3.4 ـ القواسم المشتركة لعدة أعداد طبيعية :

إن مجموعة القواسم المشتركة لعدة أعداد طبيعية غير معدومة هي مجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر لها .

مثال :

لتكن الأعداد الطبيعية 48 ، 54 ، 66 .

نعلم أن ق م أ (48 ، 54 ، 66) = 6

إذن مجموعة القواسم المشتركة لهذه الأعداد هي مجموعة قواسم العدد الطبيعي 6

وهي المجموعة { 1 ، 2 ، 3 ، 6 }

حاصلا قسمتي عددين طبيعيين غير معدومين على قاسمها المشترك الأكبر هما عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

مثال :

نعتبر العددين 48 ، 54

نعلم أن ق م أ (48 ، 54) = 6

حاصل قسمة 48 على 6 هو 8 وحاصل قسمة 54 على 6 هو 9 .

هذان الحاصلان أوليان فيما بينهما .

5 ـ المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية :

1.5 ـ قاعدة

للحصول على المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية كل منها أكبر من 1 :

- نحلل كلا من هذه الأعداد إلى جُداء عوامل أولية .
- نحسب جداء هذه العوامل حيث يؤخذ كل عامل مرة واحدة فقط وبأكبر أس .

نرمز إلى المضاعف المشترك الأصغر للأعداد أ ، ب ، حـ بالرمز :

م م أ (أ ، ب ، حـ)

مثال :

لنبحث عن المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 720 ، 1512 ، **1800**

- نحلل كلا من هذه الأعداد إلى جُداء عوامل أولية

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ ؛ $1512 = 2^3 \times 3^3 \times 7$ ؛

$1800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$

- نحسب جُداء العوامل الأولية حيث يؤخذ كل عامل مرة واحدة وبأكبر أس فنحصل على :

م م أ $(720 ، 1512 ، 1800) = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 = 75\ 600$

2.5 ـ خواص المضاعف المشترك الأصغر :

> إن مجموعة المضاعفات المشتركة لعدة أعداد طبيعية غير معدومة هي مجموعة مضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لها .

مثال :

المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 6 ، 9 ، 12 هو 36

إذن مجموعة المضاعفات المشتركة للأعداد 6 ، 9 ، 12 هي مجموعة المضاعفات للعدد 36 .

• نظرية

> إن المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين أوليين فيما بينهما يساوي جُداءهما .

مثال :

م م أ $(20 ، 21) = 20 \times 21 = 420$

6 ـ تطبيقات على الكسور

1.6 ـ الكسور المتكافئة

يكون كسران $\frac{أ}{ب}$ و $\frac{حـ}{ء}$ متكافئين
إذا وفقط إذا كان أ ء = ب حـ

لدينا النتيجتين التاليتين :

• عندما نضرب كلا من حدي الكسر $\frac{أ}{ب}$ بعدد طبيعي غير معدوم ك نحصل على كسر مكافئ للكسر $\frac{أ}{ب}$ أي :

$$\frac{أ}{ب} = \frac{أ \times ك}{ب \times ك}$$ (ك عدد طبيعي غير معدوم)

• عندما نقسم كلا من حدي الكسر $\frac{أ}{ب}$ على قاسم مشترك لهما ك نحصل على كسر مكافىء للكسر $\frac{أ}{ب}$ أي :

$$\frac{أ}{ب} = \frac{أ : ك}{ب : ك}$$ (ك قاسم مشترك للعددين أ وَ ب)

مثال :

الكسور $\frac{1}{2}$ ، $\frac{5}{10}$ ، $\frac{15}{30}$ ، $\frac{150}{300}$ متكافئة

الكسور $\frac{140}{360}$ ، $\frac{14}{36}$ ، $\frac{7}{18}$ متكافئة

2.6 ـ الكسور غير قابلة للإختزال

أ ، ب عددان طبيعيان

نقول عن الكسر $\frac{أ}{ب}$ أنه غير قابل للإختزال إذا وفقط اذا كان العددان أ ، ب أوليين فيما بينهما

أمثلة :

- الكسور الآتية غير قابلة للاختزال :

$$\frac{14}{15} \text{ ، } \frac{1}{2} \text{ ، } \frac{3}{7} \text{ ، } \frac{15}{7} \text{ .}$$

- الكسور الآتية قابلة للاختزال :

$$\frac{2}{14} \text{ ، } \frac{6}{12} \text{ ، } \frac{15}{35} \text{ ، } \frac{150}{70} \text{ .}$$

3.6 ـ اختزال كسر :

- عندما نقسم كلا من حدي كسر على قاسم مشترك لبسطه ومقامه نحصل على كسر مختزل ونقول إننا اختزلنا هذا الكسر .
- عندما نقسم كلا من حدي كسر على القاسم المشترك الأكبر لبسطه ومقامه نحصل على كسر غير قابل للاختزال .

مثال :

- نعلم أن م م أ (720 ، 1800) = 360

إذن $\frac{720}{1800} = \frac{720 : 360}{1800 : 360} = \frac{2}{5}$

الكسر $\frac{2}{5}$ غير قابل للاختزال ويكافيء الكسر $\frac{720}{1800}$

4.6 ـ توحيد مقامات عدة كسور :

للحصول على المقام المشترك لعدة كسور :

- نبحث عن المضاعف المشترك الأصغر لمقامات هذه الكسور .
- نبحث عن الكسور المكافئة للكسور المعطاة حيث يكون مقام كل منها يساوي المضاعف المشترك الأصغر المحصل عليه سابقا .

مثلا :

1) توحيد مقامي الكسرين $\frac{5}{8}$ ، $\frac{7}{9}$:

- لدينا $8 = 2^3$ ، $9 = 3^2$

إذن م م أ $(8 ، 9) = 8 \times 9 = 72$

ومنه $\frac{5}{8} = \frac{9 \times 5}{9 \times 8} = \frac{45}{72}$ و $\frac{7}{9} = \frac{8 \times 7}{8 \times 9} = \frac{56}{72}$

2) توحيد مقامات الكسور. $\frac{3}{8}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{7}{6}$:

- لدينا $8 = 2^3$ ؛ $4 = 2^2$ ؛ $6 = 2 \times 3$

إذن م م أ $(8 ، 4 ، 6) = 2^3 \times 3 = 24$

ومنه : $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 3}{3 \times 8} = \frac{9}{24}$ ؛ $\frac{5}{4} = \frac{6 \times 5}{6 \times 4} = \frac{30}{24}$ ؛

$\frac{7}{6} = \frac{4 \times 7}{4 \times 6} = \frac{28}{24}$

تمرين محلول : احسب الفرق $\frac{150}{180} - \frac{187}{495}$

- لنختزل .الكسرين $\frac{150}{180}$ و $\frac{187}{495}$

لدينا : $\frac{150}{180} = \frac{5^2 \times 3 \times 2}{5 \times 3^2 \times 2^2} = \frac{5}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$

و $\frac{187}{495} = \frac{17 \times 11}{11 \times 5 \times 3^2} = \frac{17}{5 \times 3^2} = \frac{17}{45}$

• لنوحد مقامي الكسرين $\frac{5}{6}$ و $\frac{17}{45}$.

م م أ (6 ، 45) $= 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

ومنه : $\frac{5}{6} = \frac{(5 \times 3) \times 5}{(5 \times 3) \times (3 \times 2)} = \frac{75}{90}$

$\frac{17}{45} = \frac{2 \times 17}{2 \times (5 \times 3^2)} = \frac{34}{90}$

إذن $\frac{150}{180} - \frac{187}{495} = \frac{5}{6} - \frac{17}{45} = \frac{75}{90} - \frac{34}{90} = \frac{41}{90}$.

---

6 العمليات في مجموعة الأعداد الحقيقية

1 ـ الجمع والضرب في المجموعة ح

1.1 ـ المجموعة ح

لقد تعرفنا في السنة السابقة على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ومجموعاتها الجزئية :

$ح_{+}$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة .

$ح_{-}$ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة .

$ح^{*}_{+}$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة غير المعدومة .

$ح^{*}_{-}$ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة غير المعدومة .

ونعلم أن : $ح_{+} \cup ح_{-} = ح$ وَ $ح_{+} \cap ح_{-} = \{0\}$

نلاحظ ، حسب ما سبق ، أن العدد 0 موجب وسالب في آن واحد .

2.1 ـ خواص الجمع والضرب في ح :

مجموعة الأعداد الحقيقية مزودة بعمليتين هما الجمع (+) والضرب (×).

نلخص خواصها في الجدولين التاليين :

الجمع (+)	ا ، ب ، حـ أعداد حقيقية كيفية
التبديل	ا + ب = ب + ا
التجميع	(ا + ب) + حـ = ا + (ب + حـ)
العنصر الحيادي	0 هو العنصر الحيادي ا + 0 = 0 + ا = ا
نظير عنصر	كل عدد حقيقي ا يقبل نظيرا (− ا) ا + (− ا) = (− ا) + ا = 0

الضرب (×)	أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية كيفية
التبديل	$أ \times ب = ب \times أ$
التجميع	$(أ \times ب) \times حـ = أ \times (ب \times حـ)$
العنصر الحيادي	1 هو العنصر الحيادي $1 \times أ = أ \times 1 = أ$
نظير عنصر	كل عدد حقيقي غير معدوم أ يقبل نظيرا $(\frac{1}{أ})$ $أ \times (\frac{1}{أ}) = (\frac{1}{أ}) \times أ = 1$ (يسمى $\frac{1}{أ}$ مقلوب أ)
توزيع الضرب على الجمع	$أ \times (ب + حـ) = أب + أحـ$ وَ $(ب + حـ) \times أ = ب \times أ + حـ \times أ$

3.1 ـ بعض قواعد الحساب في ح :

$$أ \times ب = 0 \Leftrightarrow أ = 0 \text{ أو } ب = 0$$

$(أ+ب)^2 = أ^2 + 2أب + ب^2$	$(أ+ب)^3 = أ^3 + 3أ^2ب + 3أب^2 + ب^3$
$(أ-ب)^2 = أ^2 - 2أب + ب^2$	$(أ-ب)^3 = أ^3 - 3أ^2ب + 3أب^2 - ب^3$
$(أ+ب)(أ-ب) = أ^2 - ب^2$	$أ^3 + ب^3 = (أ+ب)(أ^2 - أب + ب^2)$
	$أ^3 - ب^3 = (أ-ب)(أ^2 + أب + ب^2)$

2 ـ قوى عدد حقيقي :

1.2 ـ القوة النونية لعدد حقيقي :

$أ$ عدد حقيقي وَ $ن$ عدد طبيعي حيث $ن \geqslant 2$

• تعريف

القوة النونية للعدد الحقيقي $أ$ هي العدد الحقيقي $أ^{ن}$ المعرّف كما يلي :

$$أ^{ن} = \underbrace{أ \times أ \times أ \times \ldots\ldots \times أ}_{ن \text{ عاملا}}$$

نقبل ، إصطلاحاً أن :

- $أ^{1} = أ$
- مهما كان العدد الحقيقي غير المعدوم $أ$:

$$أ^{0} = 1 \quad \text{و} \quad أ^{-ن} = \frac{1}{أ^{ن}}$$

2.2 ـ الحساب على القوى ذات الأس الصحيح :

$أ$ ، $ب$ عددان حقيقيان غير معلومين .

مهما كان العددان الصحيحان $هـ$ ، $ن$ فإن :

- $أ^{هـ} \times أ^{ن} = أ^{هـ + ن}$
- $\dfrac{أ^{هـ}}{أ^{ن}} = أ^{هـ - ن}$
- $(أ^{هـ})^{ن} = (أ^{ن})^{هـ} = أ^{هـ ن}$
- $(أ \times ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$
- $\left(\dfrac{أ}{ب}\right)^{ن} = \dfrac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

3.2 ـ القوة النونية للعدد 10 :

• كتابة عدد كبير باستعمال قوى العدد 10 :

يمكن كتابة عدد كبير على شكل جداء عددين أحدهما محصور بين 1 و 10 والآخر قوة للعدد 10 .

مثلا :

$100 = 10^2$ ؛ $1000 = 10^3$ ؛ $10\,000 = 10^4$ ؛

$6\,500\,000\,000 = 6{,}5 \times 10^9$

• كتابة عدد قريب من الصفر باستعمال قوى 10:

يمكن كتابة عدد قريب من الصفر على شكل جداء عددين أحدهما محصور بين 1 وَ 10 والآخر قوة للعدد 10 .

مثلا :

$0{,}1 = 10^{-1}$ ؛ $0{,}01 = 10^{-2}$ ؛ $0{,}001 = 10^{-3}$

$0{,}000\,005 = 5 \times 10^{-6}$ ؛ $0{,}012 = 1{,}2 \times 10^{-2}$

• إن كتابة عدد باستعمال قوى 10 تساعد كثيرا في انجاز بعض العمليات الحسابية .

أمثلة :

1) السنة الضوئية هي المسافة التي يقطعها الضوء في مدة سنة . سرعة الضوء هي 300 000 كم/ثا قيمة السنة الضوئية بالامتار هي :

$3 \times 10^5 \times 3600 \times 24 \times 365 = 9{,}4608 \times 10^{15}$

2) لنحسب الجداء $1{,}00\,002 \times 0{,}99\,998$

يمكن كتابة هذا الجداء كما يلي :

$1{,}00\,002 \times 0{,}99\,998 = (1 + 2 \times 10^{-5})(1 - 2 \times 10^{-5})$

$= 1^2 - (2.10^{-5})^2 = 1 - 4.10^{-10} = 0{,}9\,999\,999\,996$

4.2 ـ إشارة قوة عدد حقيقي غير معدوم :

اذا كان $ا$ عددا حقيقيا غير معدوم و $ن$ عددا طبيعيا فإن :

- $ا > 0 \Leftarrow ا^{ن} > 0$
- ($ا < 0$ وَ $ن$ زوجي) $\Leftarrow ا^{ن} > 0$
- ($ا < 0$ و $ن$ فردي) $\Leftarrow ا^{ن} < 0$

3 ـ الجذور التربيعية :

1.3 ـ تعاريف :

من أجل كل عدد حقيقي موجب $ا$ يوجد عددان حقيقيان متناظران مربع كل منهما يساوي $ا$.

كل عدد من هذين العددين الحقيقين المتناظرين يسمى **جذرا تربيعيا** للعدد الحقيقي الموجب $ا$.

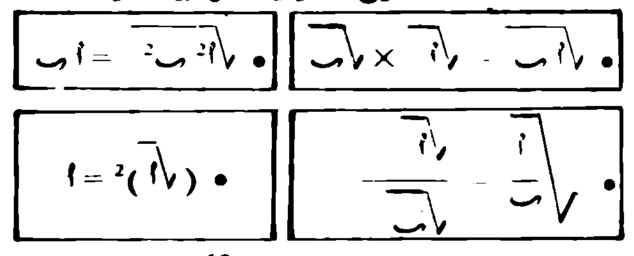
نرمز إلى **الجذر التربيعي الموجب** للعدد الموجب $ا$ بالرمز $\sqrt{ا}$

- الرمز ($-\sqrt{ا}$) يدل على **الجذر التربيعي السالب** للعدد الحقيقي الموجب $ا$
- إذا كان $ا = 0$ فإن $\sqrt{ا} = 0$
- إذا كان $ا$ عددا حقيقيا موجبا و $س$ عددا حقيقيا فإن :

$س^{2} = ا \Leftrightarrow س = \sqrt{ا}$ أو $س = -\sqrt{ا}$
$س = \sqrt{ا} \Leftrightarrow س^{2} = ا$ وَ $س \geqslant 0$

2.3 ـ الحساب على الجذور التربيعية :

اذا كان $ا$ ، $ب$ عددين حقيقين موجبين حيث $ب \neq 0$ فإن :



- $\sqrt{ا ب} = \sqrt{ا} \times \sqrt{ب}$
- $\sqrt{ا^{2} ب} = ا \sqrt{ب}$
- $\sqrt{\frac{ا}{ب}} = \frac{\sqrt{ا}}{\sqrt{ب}}$
- $(\sqrt{ا})^{2} = ا$

3.3 ـ تمارين :

1) اكتب العدد $\frac{3}{4+\sqrt{5}}$ على شكل كسر مقامه عدد ناطق .

$$\frac{3}{4+\sqrt{5}}=\frac{3(4-\sqrt{5})}{(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})}=\frac{12-3\sqrt{5}}{4^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{12-3\sqrt{5}}{16-5}$$

إذن : $\frac{3}{4+\sqrt{5}}=\frac{12-3\sqrt{5}}{11}$

2) احسب المجموع التالي : $\sqrt{28}-\frac{1}{2}\sqrt{63}-\frac{3}{4}\sqrt{7}$

$$\sqrt{28}-\frac{1}{2}\sqrt{63}-\frac{3}{4}\sqrt{7}=\sqrt{4\times 7}-\frac{1}{2}\sqrt{9\times 7}-\frac{3}{4}\sqrt{7}$$

$$=2\sqrt{7}-\frac{3}{2}\sqrt{7}-\frac{3}{4}\sqrt{7}$$

$$=\frac{8}{4}\sqrt{7}-\frac{6}{4}\sqrt{7}-\frac{3}{4}\sqrt{7}$$

إذن $\sqrt{28}-\frac{1}{2}\sqrt{63}-\frac{3}{4}\sqrt{7}=-\frac{1}{4}\sqrt{7}$

3) احسب $\frac{3}{4-\sqrt{5}}+\frac{2}{4+\sqrt{5}}$

$$\frac{3}{4-\sqrt{5}}+\frac{2}{4+\sqrt{5}}=\frac{3(4+\sqrt{5})+2(4-\sqrt{5})}{(4-\sqrt{5})(4+\sqrt{5})}$$

$$\frac{3}{4-\sqrt{5}}+\frac{2}{4+\sqrt{5}}=\frac{20+\sqrt{5}}{16-5}=\frac{20+\sqrt{5}}{11}$$

3 . 4. استخراج الجذر التربيعي لعدد حقيقي موجب :

نذكر فيما يلي طريقة لاستخراج الجذر التربيعي لعدد حقيقي موجب

مثلا : لحساب الجذر التربيعي للعدد 35842 أو لحساب قيمة مقربة له نتبع الطريقة التالية

1) نجزئ هذا العدد من اليمين إلى اليسار إلى أقسام ، كل قسم يتكون من رقمين : فنجد
3 58 42

2) نبحث عن أكبر رقم ﻫ بحيث
$ﻫ^2 \leqslant 3$. فنجد ﻫ = 1

3) نأخذ ضعف 1 وهو 2 ثم نبحث عن أكبر رقم ﻫ بحيث
$ﻫ \times 2ﻫ \leqslant 258$
فنجد ﻫ = 8

3 58 42	189
- 1	$1^2=1$
2 58 - 2 24	28 x 8 = 224
34 42 - 33 21	369 x 9 = 3321
1 21	

4) لنأخذ ضعف العدد 18 وهو 36 ثم نبحث عن أكبر رقم ں بحيث
$ں \times 36ں \leqslant 3442$

فنجد ں = 9

يمكن التحقق من أن : $189^2 \leqslant 35842 \leqslant 190^2$

و $189^2 + 121 = 35842$

- العدد 189 يسمى القيمة المقربة بالنقصان إلى الوحدة للعدد $\sqrt{38542}$
- العدد 121 يسمى باقي عملية استخراج الجذر التربيعي المقرب بالنقصان إلى الوحدة للعدد 35842

إذا أردنا مواصلة هذه العملية إلى إيجاد الجذر التربيعي المقرب إلى $\frac{1}{10}$ للعدد 35842 فإننا :

3 58 42	189,31
1	$1^2 = 1$
2 58 2 24	$28 \times 8 = 224$
34 42 33 21	$369 \times 9 = 3321$
1 21 00 1 13 49	$3783 \times 3 = 11349$
7 51 00 3 78 61	$37861 \times 1 = 37861$
3 72 39	

1) نضع صفرين عن يمين الباقي 121 فنجد 12100

2) نضع فاصلة عن يمين العدد 189

3) نأخذ ضعف العدد 189 وهو 378 ثم نبحث عن أكبر رقم ل

بحيث $12100 \geqslant 378$ ل × ل

فنجد **ل = 3**

يمكن التحقق من

$(189,4) \geqslant 35842 \geqslant ^2(189,3)$

العدد 189,3 يسمى القيمة المقربة بالنقصان إلى $\frac{1}{10}$ للعدد $\sqrt{35842}$

إذا أردنا مواصلة هذه العملية إلى إيجاد الجذر التربيعي المقرب إلى $\frac{1}{100}$ للعدد 35842

فإننا :

1) نضع صفرين عن يمين الباقي 751 فنجد 75100

2) نأخذ ضعف العدد 1893 وهو 3786 ثم نبحث عن أكبر رقم ك بحيث

ك × ك $3786 \geqslant 75100$

فنجد ك = 1

يمكن أن نتحقق من أن :

$^2(189,82) \geqslant 35842 \geqslant ^2(189,31)$

العدد 189,31 يسمى القيمة المقربة بالنقصان إلى $\frac{1}{100}$ للعدد $\sqrt{35842}$

يمكن مواصلة هذه العملية لإيجاد قيم مقربة أكثر فأكثر للجذر التربيعي للعدد 35842

4 ـ نسبة عددين حقيقيين ـ التناسب .

1.4 ـ نسبة عدد حقيقي إلى عدد حقيقي غير معدوم :

> نسبة العدد الحقيقي أ إلى العدد الحقيقي غير المعدوم ب هي حاصل قسمة العدد أ على العدد ب .

نرمز إلى نسبة العدد أ إلى العدد ب بالرمز $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$.

إذا كان ب عددا حقيقيا يختلف عن الصفر فإن :

$$\text{س} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \Longleftrightarrow \text{أ} = \text{ب} \times \text{س}$$

2.4 ـ التناسب :

أ . ب . حـ . د أعداد حقيقية غير معدومة .

> أ . ب . حـ . د مأخوذة بهذا الترتيب تشكل تناسبا إذا وفقط إذا كان :
>
> $$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$$

أ وَ د هما طرفا التناسب

ب وَ حـ هما وسطا التناسب

د هو الرابع المتناسب للأعداد الحقيقية أ ، ب ، حـ بهذا الترتيب

إذا كان ب ، حـ متساويين فإن ب يسمى وسطا متناسبا بالنسبة إلى العددين أ ، د .

مثال :

الأعداد $0{,}0003$ ؛ $0{,}7 \times 10^{3}$ ؛ $0{,}09 \times 10^{-2}$ ؛ 2100 مأخوذة بهذا الترتيب تشكل تناسبا لأن :

$$0{,}0003 \times 2100 = (0{,}7 \times 10^{3})(0{,}09 \times 10^{-2})$$

تمرين محلول :

عين العدد الحقيقي س بحيث الأعداد .

$15^{2} \times 21^{-3}$. س . $6^{3} \times 35^{2}$. 18^{2} مأخوذة بهذا الترتيب تشكل تناسبا .

الحل :

لدينا $15^{2} \times 21^{-3} \times 18^{2} = \text{س} \times 6^{3} \times 35^{2}$

$$\text{س} = \frac{15^{2} \times 21^{-3} \times 18^{2}}{6^{3} \times 35^{2}} = \frac{3^{2} \times 5^{2} \times 3^{-3} \times 7^{-3} \times 2^{2} \times 3^{4}}{2^{3} \times 3^{3} \times 5^{2} \times 7^{2}}$$

$$\text{س} = \frac{1}{2} \times 7^{-5} = \frac{1}{2 \times 7^{5}}$$

3.4 ـ الأعداد المتناسبة :

تعريف

نقول عن الأعداد الحقيقية غير المعدومة أ ، ب ، حـ ، د ، ... ، هـ مأخوذة بهذا الترتيب إنها متناسبة مع الأعداد الحقيقية غير المعدومة أ' ، ب' ، حـ' ، د' ، ... ، هـ' مأخوذة بهذا الترتيب إذا وفقط إذا كان :

$$\frac{\text{أ}}{\text{أ}'} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{حـ}}{\text{حـ}'} = \frac{\text{د}}{\text{د}'} = \ldots\ldots = \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}'} \;.$$

من $\frac{\text{أ}}{\text{أ}'} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{حـ}}{\text{حـ}'}$ نستنتج ما يلي :

- إذا كان $\text{أ}' + \text{ب}' + \text{حـ}' \neq 0$ فإن :

$$\frac{\text{أ}}{\text{أ}'} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{حـ}}{\text{حـ}'} = \frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ}}{\text{أ}' + \text{ب}' + \text{حـ}'}$$

- إذا كانت س ، ع ، ص أعداداً حقيقية حيث :

$\text{س أ}' + \text{ع ب}' + \text{ص حـ}' \neq 0$ فإن :

$$\frac{\text{أ}}{\text{أ}'} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{حـ}}{\text{حـ}'} = \frac{\text{أ س} + \text{ب ع} + \text{حـ ص}}{\text{أ}' \text{س} + \text{ب}' \text{ع} + \text{حـ}' \text{ص}}$$

7 المتباينات في المجموعة ح

1 ـ المتباينات في ح .

1.1 ـ تعريف

نقول إن العدد الحقيقي ا أصغر من أو يساوي العدد الحقيقي ب إذا وفقط إذا كان الفرق (ب − ا) عددا حقيقيا موجبا

إذن

$$ا \leqslant ب \Leftrightarrow (ب - ا) \in ح$$

- المتباينة ا ⩽ ب تكافيء المتباينة ب ⩾ ا (ب أكبر من أو يساوي ا)
- إذا كان (ا ⩽ ب) و (ا ≠ ب) نقول إن : « ا أصغر من ب » أو « ب أكبر من ا . ونكتب : ا < ب أو ب > ا

$$ا < ب \Leftrightarrow (ا \leqslant ب) \wedge (ا \neq ب)$$

2.1 ـ خواص :

- العلاقة « ⩽ » **إنعكاسية** : مهما كان العدد الحقيقي ا : ا ⩽ ا
- العلاقة « ⩽ » **متعدية** مهما كانت الأعداد الحقيقية ا ، ب ، ح

$$(ا \leqslant ب) \wedge (ب \leqslant ح) \Leftarrow (ا \leqslant ح)$$

- العلاقة « ⩽ » **ضد تناظرية** : مهما كان العددان الحقيقيان ا ، ب

$$(ا \leqslant ب) \wedge (ب \leqslant ا) \Leftarrow (ا = ب)$$

3.1 ـ المتباينات والعمليات في ح

- **المتباينات والجمع** :

إذا كانت ا ، ب ، ح أعدادا حقيقية فإن :

$$ا \leqslant ب \Leftrightarrow ا + ح \leqslant ب + ح$$

$$(ا \leqslant ب) \wedge (ح \leqslant ء) \Leftarrow ا + ح \leqslant ب + ء$$

4.1 ـ المتباينات والضرب :

إذا كانت أ ، ب ، ح أعدادا حقيقية فإن :

إذا كان ح > 0 فإن : $أ \leq ب \iff أح \leq ب ح$
إذا كان ح < 0 فإن : $أ \leq ب \iff أح \geq ب ح$

إذا كانت أ ، ب ، ح ، ء أعدادا موجبة فإن :

• $(أ \leq ب)$ و $(ح \leq ء) \Leftarrow أ ح \leq ب ء$
• $أ \leq ب \iff أ^2 \leq ب^2$

إذا كان أ > 0 و ب > 0 فإن :
$أ \leq ب \iff \frac{1}{أ} \geq \frac{1}{ب}$

مثال : المتباينتان $(5أ \geq 12 + 2أ)$ و $(أ \geq 4)$ متكافئتان **لأن** :

$$5أ \geq 12 + 2أ \iff 5أ + (-2أ) \geq 12 + 2أ + (-2أ)$$

$$\iff 3أ \geq 12$$

$$\iff \frac{1}{3} \times 3أ \geq \frac{1}{3} \times 12$$

$$\iff أ \geq 4$$

2 ـ المجالات في المجموعة ح :

أ ، ب عددان حقيقيان حيث $أ \leq ب$

• المجال **المغلق** الذي **حداه أ** ، ب هو مجموعة الأعداد الحقيقية س حيث $أ \leq س \leq ب$ ؛ نرمز اليه بالرمز [أ ، ب] .

$$[أ ، ب] = \{ س \in ح ، أ \leq س \leq ب \}$$

أ ب

- المجال **المفتوح** الذي **حداه** أ ، ب هو مجموعة الأعداد الحقيقية س حيث أ < س < ب

نرمز اليه بالرمز]أ ، ب[.

]أ ، ب[= {س ∈ ح ، أ < س < ب}

تُستعمل أيضا في المجموعة ح مجالات أخرى وهي :

]أ ، ب] = {س ∈ ح ، أ < س ≤ ب} مجال مفتوح في أ ومغلق في ب

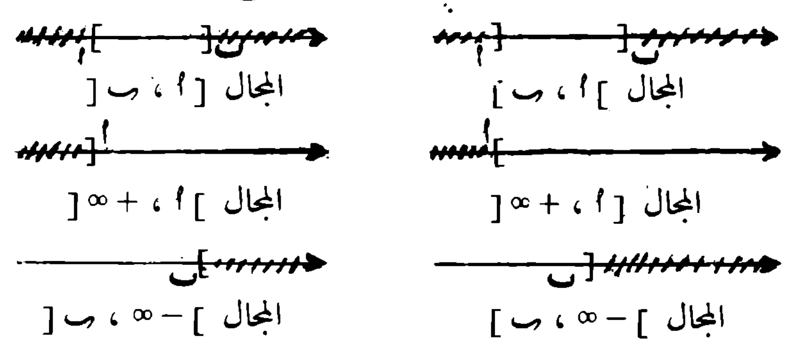
[أ ، ب[= {س ∈ ح ، أ ≤ س < ب} مجال مغلق في أ ومفتوح في ب

[أ ، +∞[= {س ∈ ح ، س ≥ أ} مجال مغلق في أ وغير محدود

]أ ، +∞[= {س ∈ ح ، س > أ} مجال مفتوح في أ وغير محدود

]−∞ ، ب] = {س ∈ ح ، س ≤ ب} مجال مغلق في ب وغير محدود

]−∞ ، ب[= {س ∈ ح ، س < ب} مجال مفتوح في ب وغير محدود



3 ـ القيمة المطلقة لعدد حقيقي :

1.3 ـ تعريف :

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي أ هي العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز اليه بالرمز | أ | المعرف كما يلي :

إذا كان أ ≥ 0 فإن | أ | = أ

إذا كان أ ≤ 0 فإن | أ | = − أ

مثلا : • $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ (لأن $\sqrt{2} > 1$)
• $|\sqrt{3} - 3| = -(\sqrt{3} - 3) = 3 - \sqrt{3}$
(لأن $\sqrt{3} < 3$)

2.3 ـ خواص القيمة المطلقة :

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن :

• $\sqrt{أ^2} = |أ|$
• $|أ.ب| = |أ| . |ب|$
• $|أ + ب| \leqslant |أ| + |ب|$

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين حيث ب $\neq 0$ فإن :

• $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$

أمثلة • $\sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2} = |\sqrt{3} - 3| = 3 - \sqrt{3}$
• $\sqrt{(3 - \sqrt{3})^2} = |3 - \sqrt{3}| = 3 - \sqrt{3}$
• $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{1 + 2 - 2\sqrt{2}}$
$= \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$
$= |1 - \sqrt{2}|$
$= \sqrt{2} - 1$

3.3 ـ القيمة المطلقة والمجالات :

س عدد حقيقي و α عدد حقيقي موجب غير معدوم

$|س| < \alpha \Leftrightarrow س^2 < \alpha^2$ (لأن $|س|$ و α موجبان)
$\Leftrightarrow (س^2 - \alpha^2) < 0$
$\Leftrightarrow (س + \alpha)(س - \alpha) < 0$

لنبحث عن اشارة الجداء $(س + \alpha)(س - \alpha)$

س	$-\infty$		$-\alpha$		$+\alpha$		$+\infty$
$\text{س}+\alpha$		$-$	0	$+$		$+$	
$\text{س}-\alpha$		$-$		$-$	0	$+$	
$(\text{س}+\alpha)(\text{س}-\alpha)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

من الجدول السابق نستنتج أن :

$$(\text{س}+\alpha)\,(\text{س}-\alpha) < 0 \iff -\alpha < \text{س} < +\alpha$$

$$\iff \text{س} \in]-\alpha \,،\, +\alpha[$$

إذن : $|\text{س}| < \alpha \iff \text{س} \in]-\alpha \,،\, +\alpha[$

$$-\alpha < \text{س} < +\alpha$$

ملاحظة :

ليكن أ ، α عددين حقيقين حيث $\alpha > 0$.

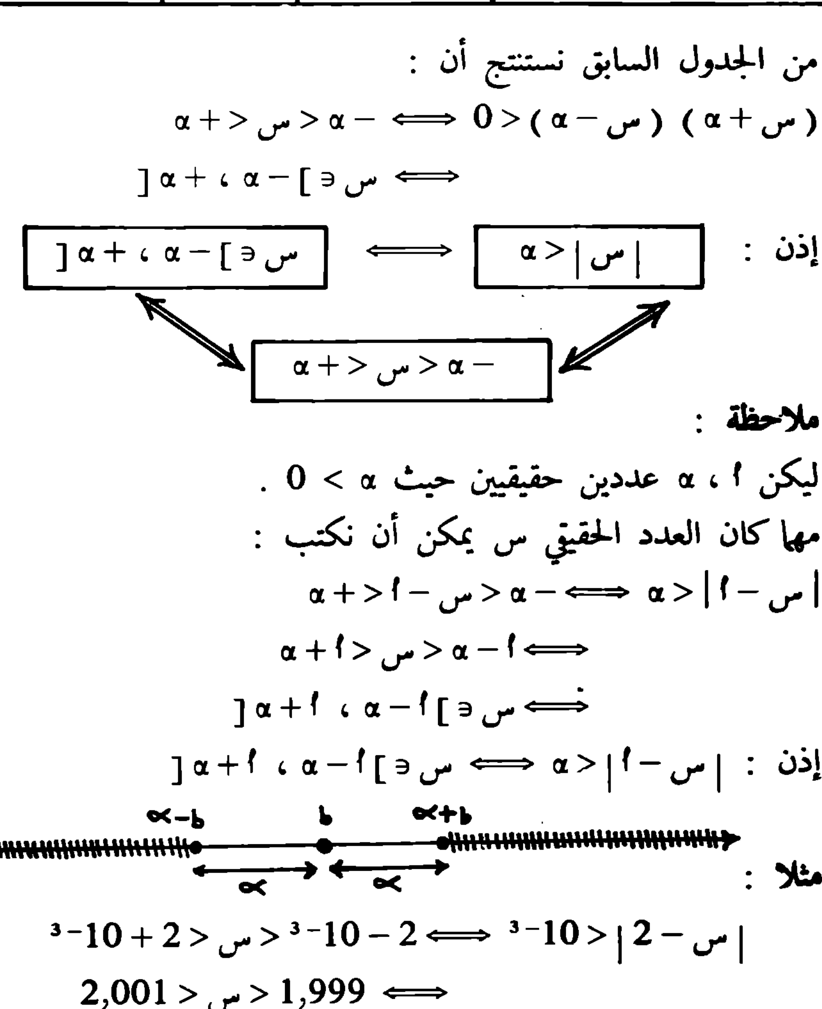
مهما كان العدد الحقيقي س يمكن أن نكتب :

$$|\text{س}-\text{أ}| < \alpha \iff -\alpha < \text{س}-\text{أ} < +\alpha$$

$$\iff \text{أ}-\alpha < \text{س} < \text{أ}+\alpha$$

$$\iff \text{س} \in]\text{أ}-\alpha \,،\, \text{أ}+\alpha[$$

إذن : $|\text{س}-\text{أ}| < \alpha \iff \text{س} \in]\text{أ}-\alpha \,،\, \text{أ}+\alpha[$



مثلا :

$$|\text{س}-2| < 10^{-3} \iff 2-10^{-3} < \text{س} < 2+10^{-3}$$

$$\iff 1{,}999 < \text{س} < 2{,}001$$

$$\iff \text{س} \in]1{,}999 \,،\, 2{,}001[$$

8 حصر عدد حقيقي ـ القيم المقربة

1 . حصر عدد حقيقي :

1 . 1 تعريف :

> نسمي حصرا للعدد الحقيقي س كل ثنائية (أ ، ب) من ح²
> تحقق أ ⩽ س ⩽ ب

أمثلة :

(2 ، 2,3) حصر للعدد $\sqrt{5}$ لأن $2 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 2,3$

(1,66 ، 1,67) حصر للعدد $\frac{5}{3}$ لأن $1,66 \leqslant \frac{5}{3} \leqslant 1,67$

(3,141 ، 3,142) حصر للعدد π لأن $3,141 \leqslant \pi \leqslant 3,142$

(3.1415 ، 3,1416) حصر للعدد π لأن $3,1415 \leqslant \pi \leqslant 3,146$

1. 2 الجزء الصحيح لعدد حقيقي

تعريف :

> نسمي الجزء الصحيح للعدد الحقيقي س العدد الصحيح ك
> بحيث ك ⩽ س < ك + 1

أمثلة :

- الجزء الصحيح للعدد 0,5 هو 0
- الجزء الصحيح للعدد − 0,5 هو − 1
- الجزء الصحيح للعدد $\sqrt{2}$ هو 1
- الجزء الصحيح للعدد $\frac{5}{3}$ هو 1

ملاحظة : ليكن ك عددا صحيحا .

الجزء الصحيح لكل عدد حقيقي من المجال [ك . ك + 1[هو ك .

1 . 3 القيمة المقربة إلى $\frac{1}{10^{ن}}$ لعدد حقيقي

س عدد حقيقي و ن عدد طبيعي

إذا كان ك الجزء الصحيح للعدد الحقيقي س . $10^{ن}$

يمكن أن نكتب ك ⩽ س . $10^{ن}$ < ك + 1

أي : $\frac{ك}{10^{ن}} \leqslant$ س $< \frac{ك+1}{10^{ن}}$

نسمي العدد $\frac{ك}{10^{ن}}$ **القيمة المقربة إلى** $\frac{1}{10^{ن}}$ **بالنقصان للعدد س**

ونسمي العدد $\frac{ك+1}{10^{ن}}$ **القيمة المقربة إلى** $\frac{1}{10^{ن}}$ **بالزيادة للعدد س**

ملاحظة :

العددان $\frac{ك}{10^{ن}}$ و $\frac{ك+1}{10^{ن}}$ هما عددان عشريان يتكون جزءاهما العشريان من ن رقم

أمثلة :

- العدد 1.6 هو القيمة المقربة إلى $\frac{1}{10}$ بالنقصان للعدد $\frac{5}{3}$ لأن $1.6 = \frac{16}{10} \leqslant \frac{5}{3} \leqslant \frac{17}{10}$

- العدد1,42 هو القيمة المقربة إلى $\frac{1}{100}$ بالزيادة للعدد $\sqrt{2}$ لأن $1.42 = \frac{142}{100}$

و $\frac{141}{100} \leqslant \sqrt{2} \leqslant \frac{142}{100}$,

- العدد 3,1415 هو القيمة المقربة إلى $\frac{1}{10000}$ بالنقصان للعدد π لأن

$$3,1415 = \frac{31415}{10^{4}} \leqslant \pi \leqslant \frac{31416}{10^{4}}$$

2. حصر مجموع عددين حقيقيين

ا . ا′ ، ب ، ب′ ، س ، س′ أعداد حقيقية

نعلم أن :

(ا ⩽ س ⩽ ب وَ ا′ ⩽ س′ ⩽ ب′) ⇐ (ا + ا′ ⩽ س + س′ ⩽ ب + ب′)

قاعدة :

> إذا كان (ا ، ب) حصرا للعدد س وكان (ا′ ، ب′) حصرا للعدد س′ فإن (ا + ا′ ، ب + ب′) حصر للعدد س + س′

3 ـ حصر فرق

ا . ا′ . ب . ب′ . س . س′ أعداد صحيحة

إذا كان ا ⩽ س ⩽ ب (1)

وَ ا ⩽ س′ ⩽ ب′ (2)

فإنه يمكن أن نكتب

− ب′ ⩽ − س′ ⩽ − ا (3)

ومنه ا − ب′ ⩽ س − س′ ⩽ ب − ا′

قاعدة :

> إذا كان (ا ، ب) حصرا للعدد س وكان (ا′ ، ب′) حصرا للعدد س′ فإن (ا − ب′ ، ب − ا′) حصر للعدد س − س′

4 ـ حصر جذاء عددين حقيقيين موجبين

ا ، ا′ ، ب ، ب′ ، س . س′ أعداد حقيقية موجبة

نعلم أنه إذا كان ا ⩽ س ⩽ ب وكان

ا′ ⩽ س′ ⩽ ب′

فإن ا ، ا′ ⩽ س . س′ ⩽ ب . ب′

قاعدة :

> ا ، ا′ ، ب ، ب′ ، س . س′ أعداد حقيقية موجبة
> إذا كان (ا ، ب) حصرا للعدد س وكان (ا′ . ب′) حصرا للعددس′ فإن :
> (اا′ ، ب ب′) حصر للعدد س س′

ملاحظة : ليكن ك عددا صحيحا .

الجزء الصحيح لكل عدد حقيقي من المجال [ك . ك + 1[هو ك .

3 . 1 القيمة المقربة إلى $\frac{1}{10^{ن}}$ لعدد حقيقي

س عدد حقيقي و ن عدد طبيعي

إذا كان ك الجزء الصحيح للعدد الحقيقي س . $10^{ن}$

يمكن أن نكتب ك ⩽ س . $10^{ن}$ > ك + 1

أي : $\frac{ك}{10^{ن}}$ ⩽ س ⩽ $\frac{ك + 1}{10^{ن}}$

نسمي العدد $\frac{ك}{10^{ن}}$ **القيمة المقربة إلى** $\frac{1}{10^{ن}}$ **بالنقصان للعدد س**

ونسمي العدد $\frac{ك + 1}{10^{ن}}$ **القيمة المقربة إلى** $\frac{1}{10^{ن}}$ **بالزيادة للعدد س**

ملاحظة :

العددان $\frac{ك}{10^{ن}}$ و $\frac{ك + 1}{10^{ن}}$ هما عددان عشريان يتكون جزءاهما العشريان من ن رقم

أمثلة :

- العدد 1.6 هو القيمة المقربة إلى $\frac{1}{10}$ بالنقصان للعدد $\frac{5}{3}$ لأن $1.6 = \frac{16}{10} \leqslant \frac{5}{3} \leqslant \frac{17}{10}$
- العدد 1,42 هو القيمة المقربة إلى $\frac{1}{100}$ بالزيادة للعدد $\sqrt{2}$ لأن $1.42 = \frac{142}{100}$

و $\frac{141}{100} \leqslant \sqrt{2} \leqslant \frac{142}{100}$ ،

- العدد 3,1415 هو القيمة المقربة إلى $\frac{1}{10000}$ بالنقصان للعدد π لأن

$$3,1415 = \frac{31415}{10^4} \leqslant \pi \leqslant \frac{31416}{10^4}$$

2. حصر مجموع عددين حقيقيين

a ، a' ، b ، b' ، س ، س' أعداد حقيقية

نعلم أن :

($a \leqslant$ س $\leqslant b$ وَ $a' \leqslant$ س' $\leqslant b'$) $\Leftarrow$ ($a + a' \leqslant$ س + س' $\leqslant b + b'$)

قاعدة :

> إذا كان (a ، b) حصرا للعدد س وكان (a' ، b') حصرا للعدد س' فإن
> ($a + a'$ ، $b + b'$) حصر للعدد س + س'

3 ـ حصر فرق

a ، a' ، b ، b' ، س ، س' أعداد صحيحة

إذا كان $a \leqslant$ س $\leqslant b$ (1)

وَ $a' \leqslant$ س' $\leqslant b'$ (2)

فإنه يمكن أن نكتب

$-b' \leqslant -$س' $\leqslant -a'$ (3)

ومنه $a - b' \leqslant$ س $-$ س' $\leqslant b - a'$

قاعدة :

> إذا كان (a ، b) حصرا للعدد س وكان (a' ، b') حصرا للعدد س'
> فإن ($a - b'$ ، $b - a'$) حصر للعدد س $-$ س'

4 ـ حصر جذاء عددين حقيقيين موجبين

a ، a' ، b ، b' ، س ، س' أعداد حقيقية موجبة

نعلم أنه إذا كان $a \leqslant$ س $\leqslant b$ وكان

$a' \leqslant$ س' $\leqslant b'$

فإن a . $a' \leqslant$ س . س' $\leqslant b$. b'

قاعدة :

> a ، a' ، b ، b' ، س ، س' أعداد حقيقية موجبة
> إذا كان (a ، b) حصرا للعدد س وكان (a' ، b') حصرا للعدد س' فإن :
> ($a a'$ ، $b b'$) حصر للعدد س س'

5 ـ حصر حاصل قسمة

ا ، ا′ ، ب ، ب′ ، س ، س′ أعداد حقيقية موجبة

حيث ا′ $\neq 0$ ، ب′ $\neq 0$ ، س′ $\neq 0$

نعلم أنه إذا كان ا $\leqslant$ س $\leqslant$ ب وكان ا′ $\leqslant$ س′ $\leqslant$ ب′

فإنه يمكن أن نكتب $\frac{1}{ب'} \leqslant \frac{1}{س'} \leqslant \frac{1}{ا'}$ ومنه

$$\frac{ا}{ب'} \leqslant \frac{س}{س'} \leqslant \frac{ب}{ا'}$$

قاعدة :

ا ، ا′ ، ب ، ب′ ، س ، س′ أعداد حقيقية موجبة حيث ا′ $\neq 0$ ، ب′ $\neq 0$ ، س′ $\neq 0$ إذا كان (ا ، ب) حصرا للعدد س وكان (ا′ ، ب′) حصرا للعدد س′ فإن $\left(\frac{ا}{ب'} ، \frac{ب}{ا'} \right)$ حصر للعدد $\frac{س}{س'}$

6ـ حصر جدر تربيعي

نعلم أنه إذا كان ا ، ب ، س أعداد حقيقية موجبة حيث ا $\leqslant$ س $\leqslant$ ب فإن
$\sqrt{ا} \leqslant \sqrt{س} \leqslant \sqrt{ب}$

قاعدة :

ا ، ب ، س أعداد حقيقية موجبة إذا كان (ا ، ب) حصرا للعدد س فإن ($\sqrt{ا}$ ، $\sqrt{ب}$) حصر للعدد $\sqrt{س}$.

7. تمارين محلولة :

تمرين محلول 1 :

المساحة م للقرص الذي نصف قطره س هي π . س²
عيّن حصرا للمساحة م علما أن $3,14 \leqslant \pi \leqslant 3,15$ و
$0,11 \leqslant$ س $\leqslant 0,12$

الحل :

من $0,11 \leqslant$ س $\leqslant 0,12$ و $3,14 \leqslant \pi \leqslant 3.15$

نستنتج :

$0,0121 \leqslant$ س² $\leqslant 0,0144$ ثم

$3,14 \,.\, 0,0121 \leqslant$ م $\leqslant 3,15 \,.\, 0,0144$ وبالتالي

(0,037994 ، 0,045360) حصر للعدد م

وبما أن

$0,0379 \leqslant 0,037994$ و $0,045360 \leqslant 0,0454$

يمكن أن نكتب

$0,0379 \leqslant 0,037994 \leqslant$ م $\leqslant 0,045360 \leqslant 0,0454$

ومنه $0,0379 \leqslant$ م $\leqslant 0,0454$

إذن (0,0379 ، 0,0454) حصر للعدد م

تمرين محلول 2 :

ا عدد حقيقي حيث ا = $\frac{3 - \sqrt{5}}{1 + 2\sqrt{5}}$

عيّن حصرا للعدد ا علما أن (2,23 . 2,24) حصر للعدد $\sqrt{5}$

الحل :

من $2,24 \geqslant \sqrt{5} \geqslant 2,23$ نستنتج أن

$-2,23 \geqslant -\sqrt{5} \geqslant -2,24$ وبالتالي

$3-2,23 \geqslant 3-\sqrt{5} \geqslant 3-2,24$ أي

$$0,77 \geqslant 3-\sqrt{5} \geqslant 0,76 \qquad (1)$$

ونستنتج أيضا من $2,24 \geqslant \sqrt{5} \geqslant 2,23$ أن

$$2,24\times 2+1 \geqslant 2\times\sqrt{5}+1 \geqslant 2,23 \times 2+1$$

أي $5,48 \geqslant 2\sqrt{5}+1 \geqslant 5,46 \qquad (2)$

وأخيرا من (1) و (2) نستنتج :

أي $\dfrac{0,77}{5,46} \geqslant \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1} \geqslant \dfrac{0,76}{5,48}$

$\left(\dfrac{0,76}{5,48} ، \dfrac{0,77}{5,46}\right)$ حصر للعدد أ

إذا لاحظنا أن $\dfrac{0,76}{5,48} \geqslant 0,13$ و $0,15 \geqslant \dfrac{0,77}{5,46}$

فإنه يمكن أن نكتب

$0,15 \geqslant \dfrac{0,77}{5,46} \geqslant أ \geqslant \dfrac{0,76}{5,48} \geqslant 0,13$ ومنه $0,15 \geq أ \geq 0,13$

إذن $(0,13 ، 0,15)$ حصر للعدد أ .

تـمـاريـن

القواسم المشتركة – القاسم المشترك الأكبر – المضاعف المشترك الأصغر – تطبيق على الكسور .

1. عيّن القاسم المشترك الأكبر ثم مجموعة القواسم المشتركة للأعداد المعطاة في كل حالة من الحالات التالية :

1) 840 . 1800
2) 3696 . 5082
3) 630 . 1638 . 1848
4) 2520 . 3360 . 4032

2. عيّن المضاعف المشترك الأصغر للأعداد المعطاة في كل حالة من الحالات التالية :

1) 180 . 152
2) 2916 . 3402
3) 15 . 18 . 25
4) 132 . 198 . 297

3. أنجز العمليات التالية :

1) $\frac{162}{243}+\frac{47}{141}-\frac{63}{126}$ — 5) $\frac{14}{42}\times\frac{63}{84}\times\frac{55}{66}$

2) $\frac{95}{133}-\frac{51}{153}+\frac{72}{90}$ — 6) $\left(1-\frac{172}{215}+\frac{56}{16}\right)\times\frac{5}{7}$

3) $\frac{35}{420}+\frac{19}{12}-1$ — 7) $\left(\frac{85}{153}+\frac{29}{145}-\frac{36}{144}\right):\frac{5}{7}$

4) $\frac{40}{65}-\frac{55}{221}+\frac{32}{56}$ — 8) $\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{152}-\frac{55}{209}\right):\frac{19}{27}$.

4. عيّن كسراً $\frac{ا}{ب}$ يكافيء الكسر $\frac{72}{90}$ حسب كل حالة من الحالات التالية :

1) ا + ب = 108

2) ب − ا = 13

3) 3 ا + 5 ب = 74

5. س عدد طبيعي ..
بقسمة كل عدد من الأعداد 2780 ، 4860 ، 3470 على س نحصل على البواقي 8 ، 9 ، 5 على الترتيب . عيّن أكبر قيمة للعدد س .

6. س عدد طبيعي .
بقسمة العدد س على كل عدد من الأعداد 84 ، 126 ، 168 نحصل على البواقي 83 ، 125 ، 167 على الترتيب . عيّن أصغر قيمة للعدد س
(إرشادات : يمكن حساب س + 1) .

الحساب في ح

7. أنجز العمليات التالية :

1) $$\frac{1}{60}\times 10+\left(\frac{1}{3}\times 3-\right)+\frac{1}{2}\times 5-\left(\frac{2}{5}\times 3-\right)-\frac{11}{4}-$$

2) $$\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\right)-1\right]-\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{3}\right)-1\right]-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{5}-3\right)$$

3) $3{,}1-(2{,}2-5{,}1)\times 7.3\times(4{,}1+2{,}7\times 1{,}3)$

4) $17\times(13\times 7-43)\times 19+(31-27)\times 13$

5) $(4{,}31\times 5{,}72+1{,}32)\times[2{,}49-0{,}31\times(7{,}3-3{,}9)]$.

8. ا ، ب ، ح أعداد حقيقية . بسط العبارات التالية :

1) [(ا − ح) − (ا − ب)] − [(ب − ح) − (ا + ح)]

2) 1 − [1 − (1 − ا)] − [1 − (1 − ب)] − [1 − (ب − ا)]

3) (ا + ب + ح) + (ا + ب − ح) − (ا − ب + ح) + (− ا + ب + ح)

4) ا − [ا − (ح + 1)] − [ا + (ح − (ا − 2))] + ب − 1

9. عيّن قيمة المجموع : $\frac{\text{اب}}{\text{ح}}+\frac{\text{بح}}{\text{ا}}+\frac{\text{اح}}{\text{ب}}+\frac{1}{\text{ا}}+\frac{1}{\text{ب}}$

في كل حالة من الحالات التالية :

1) ا = 1 ، ب = 2 ، ح = 3

2) ا = 1 ، ب = − 2 ، ح = 3

3) ا = − 1 ، ب = 2 ، ح = − 3

4) ا = − 1 ، ب = − 2 ، ح = − 3

10. أنجز العمليات التالية :

1) $\left(-1+\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)(-4)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{2}{9}\right)\left(\frac{18}{5}\right)$

2) $\left(\frac{4}{9}-\frac{11}{27}\right)\left(2-\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{7}{15}\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)$

3) $\frac{7}{3}\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)$

4) $\frac{9-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}{-5+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}\times\frac{8-\frac{1}{5}-\frac{7}{10}}{1-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}}$

(5 $\left(\frac{\frac{1}{7}-1}{\frac{1}{7}+1} \times \frac{2}{7} \right) : \left(\frac{18-}{10} \times \frac{\frac{1}{3}-\frac{7}{6}}{1-\frac{4}{5}} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1} \right)$

(6 $\left(\frac{\frac{1}{2}-9}{\frac{9}{5}+5} : \frac{\frac{1}{9}-2}{\frac{5}{3}+3} \right) \times \left(\frac{\frac{1}{7}+1}{\frac{1}{7}-1} : \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{3}-1} \right)$

(7 $\frac{\frac{2}{3}-1}{1-\frac{4}{5}} \times \frac{\frac{5}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{5}{3}+\frac{3}{4}} \times \frac{\frac{4}{5}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}+\frac{1}{3}}$

(8 $\frac{\frac{1}{\frac{1}{3}+1}+\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{\frac{1}{3}-1}-\frac{1}{3}+1}$. (9 $\frac{\frac{1}{\frac{1}{3}+1}+\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{\frac{1}{3}-1}-\frac{1}{3}-1}$.

11. احسب :

(1 $[{}^{2-}(3-)]^{1-} \times \frac{{}^{4}(3-)}{{}^{6}(3-)} \times {}^{5}(3-) \times {}^{4}(3-)$

(2 $\frac{{}^{3}(50-) \times {}^{4}(2-) \times {}^{7}(18-)}{{}^{2}(27-) \times {}^{5}(4-) \times {}^{6}25} \times \frac{({}^{3}9-)({}^{8}5-) \times {}^{5}(2-)}{{}^{5}30 \times {}^{4}(6-)}$

$$\frac{\dfrac{3^3}{2^4\times 5}\times\left(\dfrac{2^2}{5^2}\right)\times\left(3^2\div 2^4\right)-\left(\dfrac{3^2}{2^3\times 5}\right)^3}{1-\left(\dfrac{2^2}{5}\right)^2\div\left(\dfrac{5}{2^2}\right)^2} \quad (3$$

$$\frac{2\times 10^{4}\times 3\times 10^{-5}\times 7\times 10^{8}\times 0.3\times 10^{-4}}{10^{5}\times 25\times 10^{-4}\times 21\times 10^{3}\times 6.3} \quad (4$$

$$\frac{1.3\times 10^{-4}\times 8\times 10^{5}\times 9\times 10^{3}\times 6.7}{0.005\times 2500\times 10^{-3}\times 10{,}05} \quad (5$$

12. يعطى أ = 0,0144 . ب = 1,05 . جـ = 0,00021 . د = 4,8 .
ع = 0,182

عيّن قيمة العدد س حيث س = $\dfrac{\text{أ}\times\text{ب}^2\times\text{جـ}}{\text{د}^3\times\text{ع}}$

13. بسط العبارات التالية :

1) $-\sqrt{50}+\sqrt{32}+\sqrt{2}$ ؛

$5\sqrt{12}+8\sqrt{27}+\sqrt{75}-2\sqrt{48}-\sqrt{147}$

$\sqrt{\frac{7}{3}}+3\sqrt{\frac{28}{27}}-4\sqrt{\frac{63}{75}}$ ؛

$\sqrt{\frac{16}{28}}-\sqrt{\frac{125}{49}}-\sqrt{\frac{25}{7}}$

2) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ ؛

$(\sqrt{8}-\sqrt{18})(\sqrt{50}-\sqrt{72}+\sqrt{32})$

$(\sqrt{28}+\sqrt{7}-\sqrt{32})(\sqrt{63}-2\sqrt{8})$ ؛ $\sqrt{3+\sqrt{2}}\times\sqrt{3-\sqrt{2}}$

$\sqrt{3}\times(1-\sqrt{2})+\sqrt{8}(1-\sqrt{18})$ ؛

$(2\sqrt{5}-5\sqrt{2})(\sqrt{18}-\sqrt{20})$

3) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ؛ $\frac{\sqrt{27}+\sqrt{12}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

$(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2+(\sqrt{15}-1)^2$ ؛

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-(\sqrt{6}-1)^2+(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2$.

4) حوّل كل نسبة من النسب التالية إلى نسبة مقامها عدد ناطق .

$\frac{3}{\sqrt{5}}$ ؛ $\frac{4}{\sqrt{98}}$ ؛ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$ ؛ $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ ؛ $\frac{3+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-3}$

$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-1}$ ؛ $\frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$. $\frac{3+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}-\frac{1-2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

14. أ ، ب ، جـ أعداد صحيحة معلومة . عيّن ثلاثة أعداد صحيحة س ، ع ، ص متناسبة ، على الترتيب ، مع الأعداد أ ، ب ، جـ حيث 4 س − ع + 2 ص = ط ، ط عدد صحيح معلوم .
(تطبيق عددي : أ = 2 ؛ ب = − 3 ؛ جـ = 5 ؛ ط = 693) .

15. أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية غير معدومة ، س ، ع ، ص أعداد حقيقية و ك عدد حقيقي موجب . أثبت أن :

$$\left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}=\frac{\text{ع}}{\text{ب}}=\frac{\text{ص}}{\text{جـ}}=\text{ك}\right) \Leftarrow \frac{\sqrt{\text{س}^2+\text{ع}^2+\text{ص}^2}}{\sqrt{\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2}}=\text{ك}$$

تطبيق : عيّن الأعداد الحقيقية س ، ع ، ص المتناسبة مع الأعداد 1 ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ حيث س² + ص² + ع² = 189

16. أ ، ب ، جـ ، د أعداد حقيقية غير معدومة حيث :
5 أ − 7 ب ≠ 0 وَ 5 جـ − 7 د ≠ 0 . أثبت أن :

1) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{جـ}}{\text{د}} \Leftarrow \frac{2\text{أ}+3\text{ب}}{5\text{أ}-7\text{ب}}=\frac{2\text{جـ}+3\text{د}}{5\text{جـ}-7\text{د}}$

2) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} \Leftarrow \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}{\text{أ جـ} + \text{ب د}} = \frac{\text{أ جـ} + \text{ب د}}{\text{جـ}^2 + \text{د}^2}$

3) $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} \Leftarrow \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}{\text{جـ}^2 + \text{د}^2} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جـ د}}$.

17. عيّن العدد الحقيقي س بحيث تشكل الأعداد أ ، ب ، جـ ، د مأخوذة بهذا الترتيب تناسبا وذلك حسب كل حالة من الحالات التالية :

1) $\text{أ} = 1{,}2$ ؛ $\text{ب} = \text{س}$ ؛ $\text{جـ} = \frac{5}{4}$ ؛ $\text{د} = \frac{3}{11}$

2) $\text{أ} = -\frac{5}{4}$ ؛ $\text{ب} = \frac{8}{3}$ ؛ $\text{جـ} = \text{س}$ ؛ $\text{د} = \frac{7}{12}$

3) $\text{أ} = -\sqrt{5}$ ؛ $\text{ب} = -\sqrt{35}$ ؛ $\text{جـ} = \sqrt{2}$ ؛ $\text{د} = \text{س}$

4) $\text{أ} = \sqrt{3} - 1$ ؛ $\text{ب} = \sqrt{2} - 1$ ؛ $\text{جـ} = \sqrt{2} + 1$ ؛ $\text{د} = \text{س}$

18. عيّن س الوسط المتناسب الموجب للعددين الحقيقيين أ ، ب ، في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\text{أ} = \frac{1}{2}$ ؛ $\text{ب} = \frac{3}{4}$ 3) $\text{أ} = 121 \times 10^{-1}$ ؛ $\text{ب} = 10^{-3}$

2) $\text{أ} = 5$ ؛ $\text{ب} = 1.25$ 4) $\text{أ} = 4 + 2\sqrt{2}$ ؛ $\text{ب} = 4 - 2\sqrt{2}$.

19. رتّب الأعداد التالية ترتيباً تصاعدياً :

$\frac{21}{10}$ ؛ $\frac{23}{11}$ ؛ $\frac{44}{21}$ ؛ $\frac{111}{53}$ ؛ $\frac{155}{74}$ ؛ $\frac{791}{349}$ ؛ $\frac{1307}{724}$ ؛ $\frac{16415}{7837}$.

20. قارن بين العددين الحقيقيين أ ، ب حسب كل حالة من الحالات التالية :

1) $\text{أ} = 6\sqrt{35} + \sqrt{22}$ ؛ $\text{ب} = \sqrt{26} + \sqrt{33}$

2) $\text{أ} = 14 - 6\sqrt{5}$ ؛ $\text{ب} = 3 - \sqrt{5}$

3) $\text{أ} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ؛ $\text{ب} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times (1 + \sqrt{3})$

4) $ا = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$ ؛ $ب = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$

21. ا ، ب عددان حقيقيان حيث :

$ا = \sqrt{98} + \sqrt{32} - \sqrt{8}$ وَ $ب = \sqrt{162} - \sqrt{72} + \sqrt{18}$

1) بسط كتابة كل من ا وَ ب

2) عيّن قيمة كل عدد من الأعداد التالية ثم رتبها ترتيباً تصاعدياً :

$\frac{ا + ب}{2}$ ؛ $\sqrt{ا ب}$ ؛ $\frac{2 ا ب}{ا + ب}$.

22. ا عدد حقيقي حيث $ا = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$

• عيّن إشارة ا

• عيّن قيمة $ا^2$ ثم استنتج قيمة مبسطة للعدد ا .

تعاد الأسئلة نفسها في كل حالة من الحالات التالية :

1) $ا = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

2) $ا = \sqrt{12 + 3\sqrt{7}} - \sqrt{12 - 3\sqrt{7}}$

3) $ا = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

23. نصف قطر الكرة الأرضية r = 6400 كم .

المسافة بين الأرض والشمس تساوي 23400 × r .

سرعة الضوء 000 300 كم/ثا .

احسب بالثواني ، الزمن الذي يستغرقه الضوء لقطع المسافة بين الارض والشمس .

24. المسافة بين الأرض والنجم « α قنطورس » هي 400 271 وحدة فلكية (الوحدة الفلكية تساوي 400 23 × 6400 كم) .

الفرسخ النجمي هو واحدة لقياس المسافات قيمته 265 206 وحدة فلكية .

1) احسب قيمة الفرسخ النجمي بالكيلومترات .

2) ما هي المسافة ، بالفرسخ النجمي ، بين الأرض والنجم « α قنطورس » ؟

3) ما هو الزمن الذي يستغرقه الضوء لقطع المسافة بين النجم « α قنطورس » والأرض ؟

25. على خريطة جغرافية . 13 سم توافق 260 كم .
1) ما هي المسافة التي توافق 35 سم ؟
2) احسب القيمة التي تمثل على الخريطة 150 كم .

26. الكتلة الحجمية للهواء هي 1.29 غ/ل .
احسب كتلة الهواء المتواجد في غرفة طولها 5 أمتار عرضها 2,7 متراً وإرتفاعها 3,8 متراً .

27. نقبل أن الهواء يحتوي على 21٪ من الأكسجين وَ 79٪ من الآزوت .
1) ما هو حجم الأكسجين الموجود في 50 سم^3 من الهواء ؟
2) ما هو حجم الآزوت الذي يوافق 35 سم^3 من الاكسجين ؟

28. يشتغل فوج من العمال 12 ساعة في اليوم لبناء سدّ .
انجاز 32 متراً من هذا السدّ تمّ في 8 أيام .
فإذا اشتغل هذا الفوج 9 ساعات في اليوم فما هو الزمن الذي يتطلبه انجاز 18 متراً من هذا السدّ ؟

29. إرتفعت أجرة عامل بنسبة 10٪ في أول جانفي ثم بنسبة 5٪ في أول جويلية .
ما هي الزيادة التي استفاد بها هذا العامل بالنسبة إلى أجرته الأصلية ؟

30. ثمن كتاب هو 56 دج . ارتفع سعر هذا الكتاب بنسبة 20٪ ثم انخفض بنسبة 20٪ .
ما هو الثمن الجديد لهذا الكتاب ؟

31. إرتفع ثمن بضاعة من 624 دج إلى 792,48 دج .
ما هي النسبة المئوية التي تمثل إرتفاع ثمن هذه البضاعة ؟

32. قطر الكرة الأرضية 12750 كم وقطر القمر 3476 كم .
يدور القمر حول الأرض على دائرة نصف قطرها 000 384 كم .
تمثّل الأرض بكرة قطرها 10 سم .
ما هو قطر الكرة التي تمثل القمر ؟ وما هو قطر الدائرة التي تمثل مسار القمر ؟

33. تحتوي ذرة الهيدروجين على نواة وإلكترون . يدور الإلكترون حول النواة فيرسم دائرة قطرها عشر المليون من المليمتر تقريباً .
قطر النواة من مرتبة جزء من المائة من المليار من المليمتر .
تُمثّل النواة بكرة قطرها 1 سم .
ما هو قطر الدائرة التي يدور عليها الإلكترون ؟
عبّر على هذه النتيجة بالأمتار .

المجالات في ح – القيمة المطلقة .

34. عيّن (س ∩ ع) وَ (س ∪ ع) في كل حالة من الحالات التالية :

1) س = $[-1 ; 2] \cup]3 ; 5[$ وَ ع = $[0 ; 4[$

2) س = $]-2 \; -1[\cup \{0\} \cup [3 ; 7[$

وَ ع = $]-4 ; -2] \cup [0 ; 3] \cup \{6\}$

3) س = $]-\infty ; -4] \cup [4 ; +\infty[$

وَ ع = $[-5 ; 5] \cup \{6\} \cup]7 ; +\infty[$.

35. س عدد حقيقي . اكتب كل عدد من الأعداد التالية دون استعمال رمز القيمة المطلقة :

1) س + |س|
2) 2 |س − 3| + |س − 2|
3) 3 |س − 4| − |س + 4|
4) |(س − 1)(س − 3)|
5) 2 |س| × |س − 1| − 2 س²
6) س × |س| .

36. عيّن قيم العدد الحقيقي س حسب كل حالة من الحالات التالية :

1) |س + 3| = س + 3
2) |س − 2,5| = 2,5 − س
3) |2 س − 3| < 1
4) √((س + 1)²) = 1 − س
5) |س − 2| + |س − 4| < 1
6) |س + 1| < 1 − س

37. تعطى المجموعة ا حيث :

$ا = \{س \in ح ؛ |س - 2| < 3\} \cap \{س \in ح ؛ |2س + 1| \geqslant 5\}$

اجعل المجموعة ا على شكل مجال .

حصر عدد حقيقي

38. ا ، ب ، حـ أعداد حقيقية حيث :

$2,13 \leqslant ا < 2,14$ ؛ $-1,51 \leqslant ب < -1,50$ ؛ $0,83 \leqslant حـ < 0,84$

عين حصراً لكل عدد من الأعداد التالية :

1) $(ا + ب)$
2) $(ب - ا)$
3) $(ا + ب - حـ)$
4) $ا^2$
5) ا ب حـ
6) $\sqrt{ا}$
7) $\left(\frac{ا ب}{حـ}\right)$
8) $\left(\frac{ب}{حـ}\right)$
9) $\sqrt{-ا ب}$.

39. ا عدد حقيقي حيث $ا = \frac{4,5 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 5}$.

إذا علمت أن $2,23 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 2,24$ ؛ عيّن حصراً للعدد ا .

40. في هذا التمرين يؤخذ المتر واحدة للقياس والثنائية (3,14 ، 3,15) حصراً للعدد π .

1) المساحة سط للقرص الذي نصف قطره نق هي π نق^2

- عيّن حصراً للمساحة سط إذا كان $25 \times 10^{-3} \leqslant$ نق $\leqslant 26 \times 10^{-3}$
- عيّن حصراً لنصف القطر نق

إذا كانت قيمة سط تساوي 45,24 .

2) الحجم ح للكرة التي نصف قطرها نق هو $\frac{4}{3}\pi \times$ نق^3

إذا علمت أن $105 \times 10^{-3} \leqslant$ نق $\leqslant 106 \times 10^{-3}$ ؛ عيّن حصراً للحجم ح .

الباب الثالث

مراجعة وتمات في الهندسة المستوية

قبل الشروع في دراسة المفاهيم الواردة في برنامج الهندسة للسنة الأولى من التعليم الثانوي لابدّ من مراجعة المفاهيم الأساسية المدروسة في السنوات السابقة وتدعيمها بتمات بهدف استيعابها أكثر واستعمالها في الدروس القادمة

تقدم هذه المراجعة بواسطة تمارين ومسائل مناسبة بدل عرضها على شكل نظري .

يحتوي هذا الباب على ثلاثة دروس :

1) مراجعة المفاهيم الأساسية في الهندسة المستوية

2) مجموعات النقط من المستوي

3) الإنشاءات الهندسية

9 مراجعة المفاهيم الأساسية في الهندسة المستوية

1. المستقيمات :

1.1 ـ تعيين المستقيم :

- يوجد مستقيم واحد يشمل نقطتين مختلفتين .
- يوجد مستقيم واحد يوازي مستقيما معلوماً ويشمل نقطة معيّنة
- إذاً يُعيَّن المستقيم إذا أعطيت نقطتان مختلفتان أو إذا أعطيت نقطة ومنحى

2.1 ـ المستقيمات المتوازية :

- (ق) و (قَ) مستقيمان في المستوي

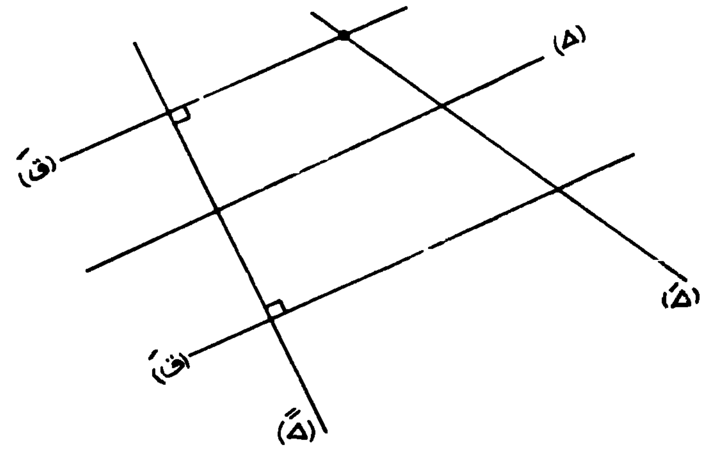
(ق) // (قَ) ⟸ (ق) ∩ (قَ) = ϕ أو (ق) = (قَ)

- إذا توازى مستقيمان (ق) و (قَ) فإن :

كل مستقيم (Δ) يوازي أحدهما يكون موازياً للآخر .

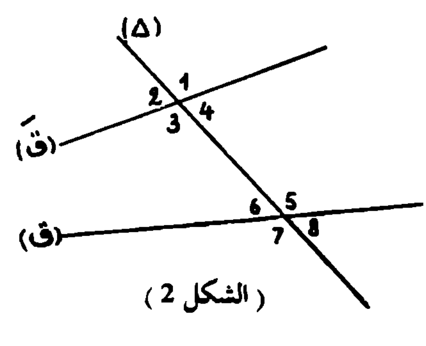
وكل مستقيم (Δ') يقطع أحدهما يكون قاطعاً للآخر.

كل مستقيم (Δ'') عمودي على أحدهما يتعامد مع الآخر (الشكل 1)



(الشكل 1)

• (ق) و (قَ) مستقيمان في المستوي و (Δ) قاطع لهما .
تحدد المستقيمات الثلاثة (ق) ، (قَ) ، (Δ) ثمانية قطاعات زاوية (الشكل 2)

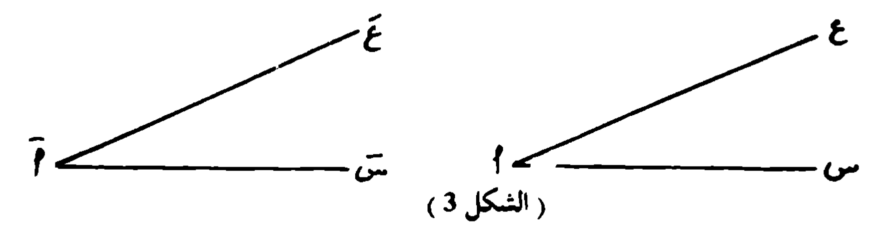


(الشكل 2)

الزاويتان 3 و 5 متبادلتان داخلياً (وكذلك 4 و 6) .
الزاويتان 1 و 7 متبادلتان خارجياً (وكذلك 2 و 8)
الزاويتان 3 و 6 داخليتان من جهة واحدة (وكذلك 4 و 5)
االزاويتان 2 و 7 خارجيتان من جهة واحدة (وكذلك 1 و 8) .
الزاويتان 1 و 5 متماثلتان (وكذلك (4 و 8) و (2 و 6) و (3 و 7))

• يتوازى المستقيمان (ق) و (قَ) إذا تحقق شرط من الشروط التالية :
(أ) زاويتان متبادلتان داخلياً متقايستان .
(ب) زاويتان متماثلتان متقايستان .
(حـ) زاويتان متبادلتان خارجياً متقايستان .
(د) زاويتان داخليتان من جهة واحدة متكاملتان
(هـ) زاويتان خارجيتان من جهة واحدة متكاملتان .

• إذا كان ضلعا زاوية حادة موازيين لضلعي زاوية حادة أخرى فإن هاتين الزاويتين متقايستان .
كذلك ، إذا كان ضلعا زاوية منفرجة موازيين لضلعي زاوية أخرى منفرجة فإن هاتين الزاويتين متقايستان .



(الشكل 3)

3.1 ـ المستقيمات المتعامدة :

- يوجد مستقيم واحد يشمل نقطة معينة ويتعامد مع مستقيم معلوم .
- إذا كانت أ و ب نقطتين متمايزتين هـ منتصف القطعة [أ ب]

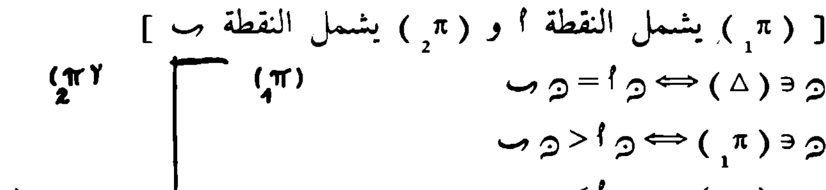
فإن المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة هـ ويتعامد مع المستقيم (أ ب)
يسمى محور القطعة [أ ب] .

يحدّد المحور (Δ) نصفي المستوي المفتوحين (π_1) و (π_2)
] (π_1) يشمل النقطة أ و (π_2) يشمل النقطة ب [

ن ∈ (Δ) ⇔ ن أ = ن ب

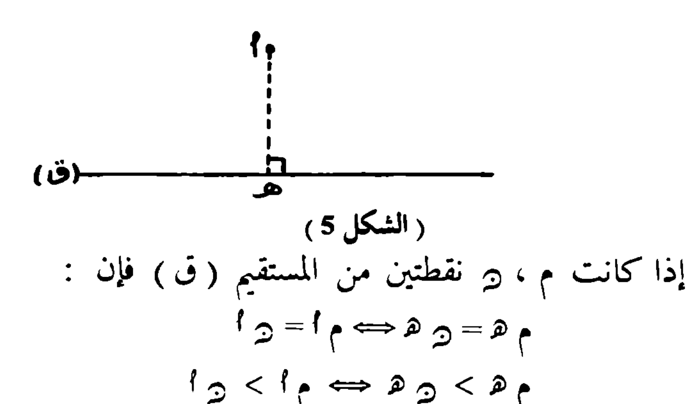
ن ∈ (π_1) ⇔ ن أ < ن ب

ن ∈ (π_2) ⇔ ن أ > ن ب



(الشكل 4)

- المسافة بين نقطة أ ومستقيم (ق)
هي طول القطعة [أ هـ]
حيث هـ هي المسقط العمودي
للنقطة أ على المستقيم (ق) .



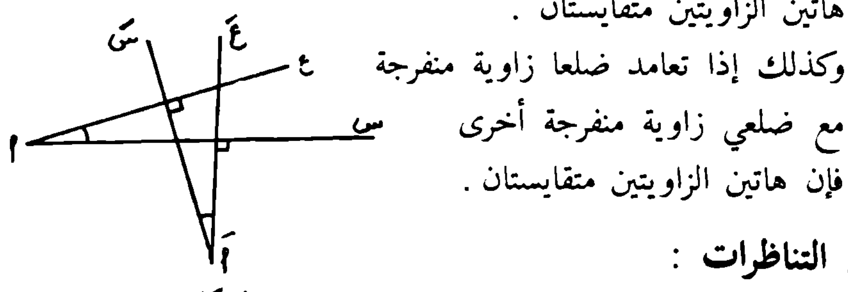
(الشكل 5)

إذا كانت م ، ن نقطتين من المستقيم (ق) فإن :

م هـ = ن هـ ⇔ م أ = ن أ

م هـ < ن هـ ⇔ م أ < ن أ

• إذا كان ضلعا زاوية حادة عموديين على ضلعي زاوية حادة أخرى فإن هاتين الزاويتين متقايستان .
وكذلك إذا تعامد ضلعا زاوية منفرجة مع ضلعي زاوية منفرجة أخرى فإن هاتين الزاويتين متقايستان .

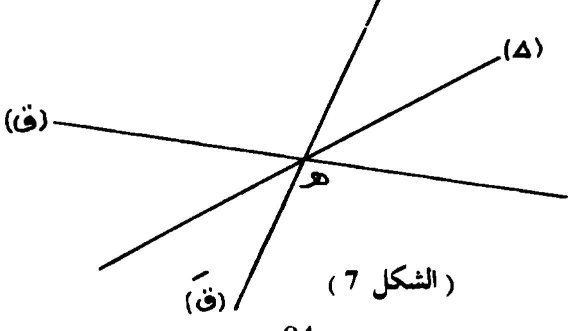


(الشكل 6)

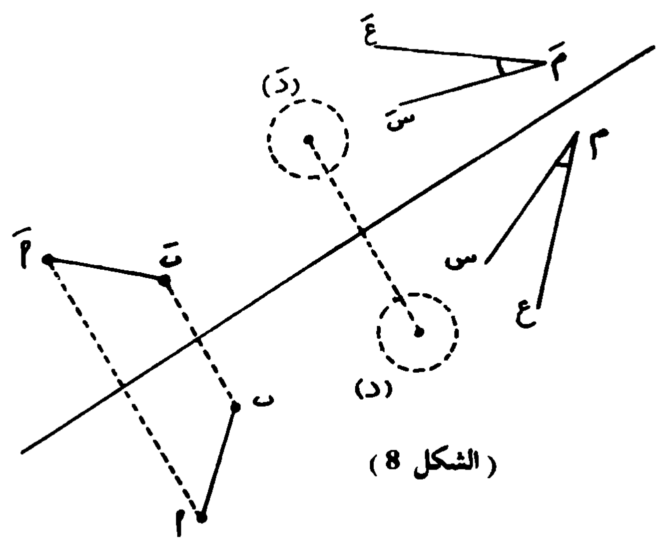
2. التناظرات :

1.2 ـ التناظر بالنسبة إلى مستقيم :

• التناظر بالنسبة إلى المستقيم (Δ) هو التطبيق . للمستوي في نفسه ، الذي يرفق بكل نقطة ء من المستوي النقطة ءَ حيث يكون المستقيم (Δ) محور القطعة [ء ءَ]
• التناظر بالنسبة إلى المستقيم (Δ) هو تقايس .
لذلك فإن :
ـ نظيرة قطعة [أ ب] هي قطعة [أَ بَ] تقايسها
ـ نظيرة دائرة (ى) هي دائرة (ىَ) تقايسها
ـ نظيرة زاوية [م س ، م ع] هي زاوية [مَ سَ ، مَ عَ] تقايسها
ـ نظير مستقيم (ق) هو مستقيم (قَ)
إذا كان (ق) يوازي (Δ) يكون (قَ) موازياً (Δ)
وإذا كان (ق) يقطع (Δ) في النقطة هـ فإن (قَ) يقطع (Δ) في نفس النقطة هـ (الشكل 7)



(الشكل 7)



(الشكل 8)

2.2 ـ التناظر بالنسبة إلى نقطة :

• التناظر بالنسبة إلى النقطة م هو التطبيق ، للمستوي في نفسه ، الذي يرفق بكل نقطة ﻫ النقطة ﻫ′ حيث تكون النقطة م منتصف القطعة [ﻫ ﻫ′] .

• التناظر بالنسبة إلى نقطة هو تقايس . لذلك فإن :

ـ نظيرة قطعة [أ ب] هي قطعة [أ′ ب′] تقايسها .

ـ نظيرة دائرة (د) هي دائرة (د′) تقايسها .

ـ نظير مستقيم (ق) هو مستقيم (ق′) موازٍ له .

ـ نظيرة زاوية [م س ، م ع] هي زاوية [م′ س′ ، م′ ع′] تقايسها .

3 ـ المثلثات :

1.3 ـ بعض النتائج :

• مهما كانت النقط أ ، ب ، ح فإن :

$$أب + ب ح \geqslant أ ح$$

و

$$أب + ب ح = أ ح \Leftrightarrow ب \in [أ ح]$$

• إذا كان أ ب جـ مثلثاً و جـ' منتصف [أ ب] ب' منتصف [أ جـ] فإن :

$$(ب' جـ') \parallel (ب جـ) \text{ و } ب' جـ' = \frac{1}{2} ب جـ$$

• مجموع أقياس زوايا المثلث يساوي قائمتين .

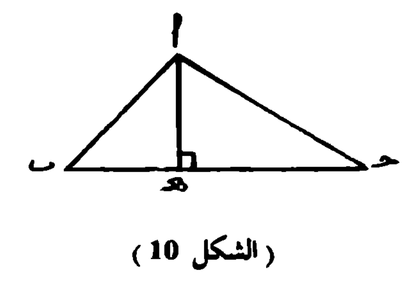
(الشكل 9)

2.3 ـ المستقيمات في المثلث :

ليكن في المستوي المثلث أ ب جـ .

• المستقيم (أ هـ) العمودي على المستقيم (ب جـ) يسمى العمود المتعلق بالضلع [ب جـ]
(الشكل 10)

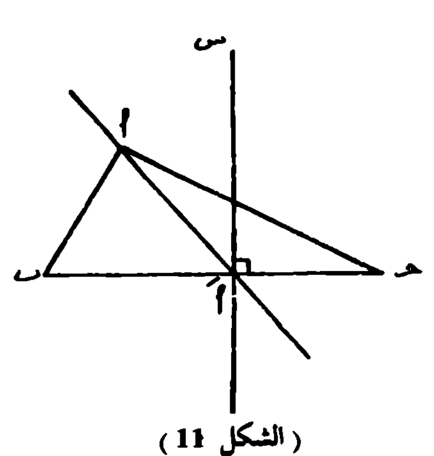
أعمدة المثلث الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة تسمى نقطة تلاقيها



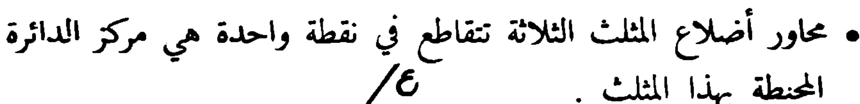
(الشكل 10)

• إذا كان أ' منتصف القطعة [ب جـ] فإن المستقيم (أ' س) العمودي على [ب جـ) يسمى المحور المتعلق بالضلع [ب جـ] .

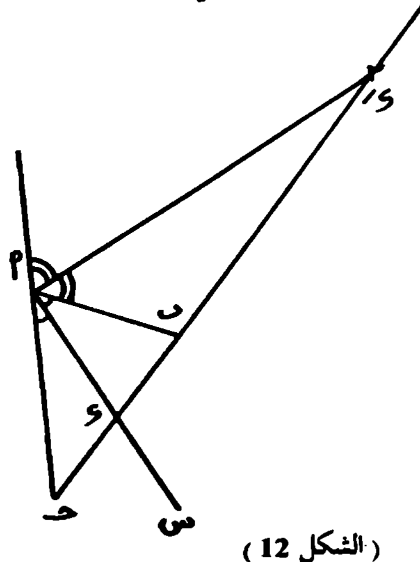
والمستقيم (أ أ') يسمى المتوسط المتعلق بالضلع [ب جـ] .



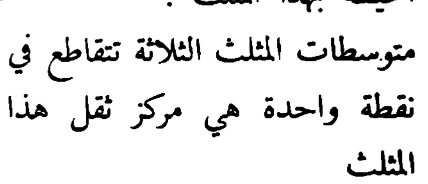
(الشكل 11)



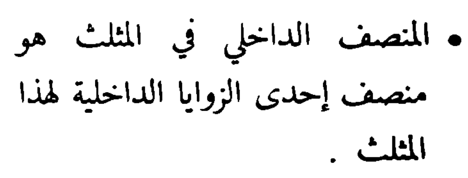
• محاور أضلاع المثلث الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث .



(الشكل 12)



متوسطات المثلث الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز ثقل هذا المثلث



• المنصف الداخلي في المثلث هو منصف إحدى الزوايا الداخلية لهذا المثلث .

المنصف الخارجي في المثلث هو منصف إحدى الزوايا الخارجية لهذا المثلث .

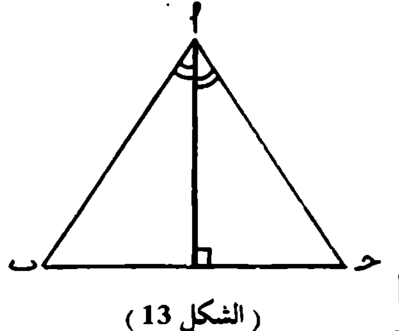
• إذا كانت ء نقطة تقاطع المستقيم (ب حـ) مع المنصف الداخلي (أ س) . ء' هي نقطة تقاطع المستقيم (ب حـ) مع المنصف الخارجي (أع)

فإن : $\frac{\text{ء حـ}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}}$ و $\frac{\text{ء' حـ}}{\text{ء' ب}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}}$

• المنصفات الداخلية الثلاثة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث

المنصفان الخارجيان لزاويتين والمنصف الداخلي للزاوية الثالثة في المثلث تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز إحدى الدوائر الثلاث التي تمس هذا المثلث من الخارج .

3.3 ـ المثلث المتساوي الساقين :



(الشكل 13)

• إذا كان ا ب حـ مثلثاً فإن :

ا ب = ا حـ ⟺ ا ب̂ حـ = ا حـ̂ ب

• في المثلث ا ب حـ إذا كان :

(Δ) المحور المتعلق بالضلع [ب حـ]

(ق) العمود المتعلق بنفس الضلع [ب حـ]

(ل) المتوسط المتعلق بنفس الضلع [ب حـ]

(ي) المنصف الداخلي المتعلق بنفس الضلع [ب حـ] .

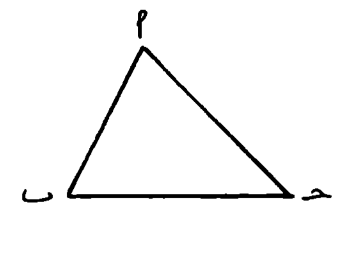
فإن : ا ب = ا حـ ⇐ (Δ) = (ق) = (ل) = (ي)

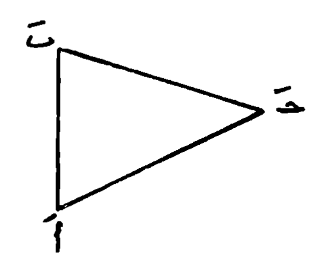
و (تطابق مستقيمين من المستقيمات (Δ) ، (ق) ، (ل) ، (ي)) ⇐ (ا ب = ا حـ)

4.3 ـ حالات تقايس مثلثين :

• يتقايس المثلثان ا ب حـ وَ ا′ ب′ حـ′ في كل حالة من الحالات التالية :

الحالة الأولى ا ب = ا′ ب′ وَ ا̂ = ا̂′ وَ ب̂ = ب̂′
الحالة الثانية ا ب = ا′ ب′ وَ ا حـ = ا′ حـ′ وَ ا̂ = ا̂′
الحالة الثالثة ا ب = ا′ ب′ وَ ا حـ = ا′ حـ′ وَ ب حـ = ب′ حـ′



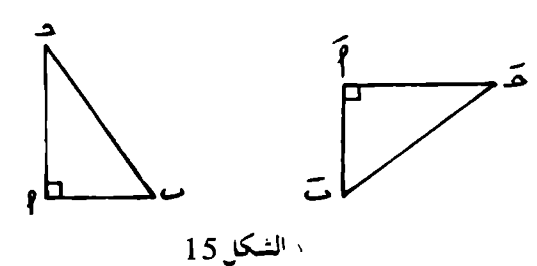


(الشكل 14)

• يتقايس المثلثان القائمان $أ ب جـ$ و $أ' ب' جـ'$ في $أ$ و $أ'$ على الترتيب في كل حالة من الحالتين التاليتين

الحالة الأولى $ب جـ = ب' جـ'$ و $\hat{ب} = \hat{ب'}$

الحالة الثانية $ب جـ = ب' جـ'$ و $أ ب = أ' ب'$



الشكل 15

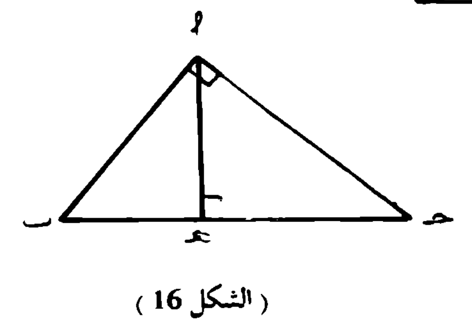
3 . 5 ـ العلاقات المترية في المثلث القائم :

• (المثلث $أ ب جـ$ قائم في $أ$) $\Longleftrightarrow$ ($أ ب^2 + أ جـ^2 = ب جـ^2$)

• إذا كان $أ ب جـ$ مثلثاً قائماً في $أ$ و ($أ هـ$) العمود المتعلق بالضلع [$ب جـ$]

فإن :

$أ ب^2 = ب جـ \times ب هـ$
$أ جـ^2 = جـ ب \times جـ هـ$
$أ هـ^2 = ب هـ \times هـ جـ$
$أ ب \times أ جـ = أ هـ \times ب جـ$



(الشكل 16)

4 ـ الأشكال الرباعية :

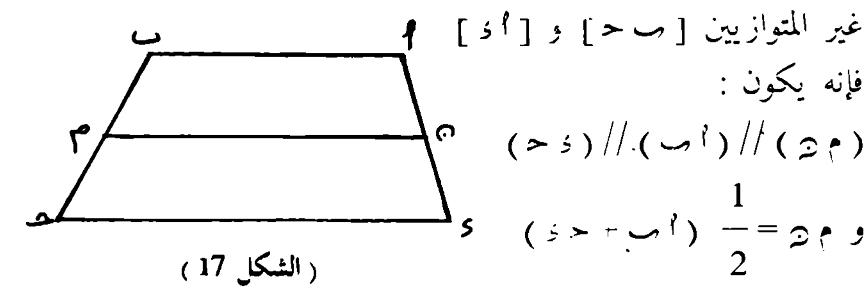
1.4 ـ شبه المنحرف :

• شبه المنحرف هو رباعي محدّب حاملا ضلعين منه متوازيان حاملا الضلعين الآخرين غير متوازيين

• في شبه المنحرف أ ب جـ د إذا كانت النقطتان م ، ن منتصفي الضلعين غير المتوازيين [ب جـ] و [أ د] فإنه يكون :

(م ن) // (أ ب) // (د جـ)

و م ن $= \frac{1}{2}$ (أ ب + جـ د)



(الشكل 17)

2.4 ـ متوازي الأضلاع

يكون الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع إذا وفقط إذا تحققت احدى الشروط التالية :

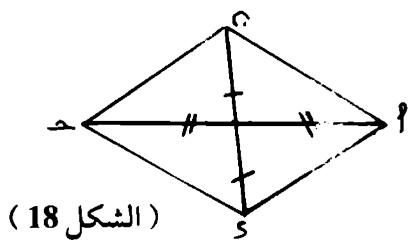
1 ـ (أ ب) // (جـ د) و (أ د) // (ب جـ)

2 ـ للقطرين [أ جـ] وَ [ب د] نفس المنتصف

3 ـ أ ب جـ د محدّب و (أ ب) // (د جـ) و أ ب = د جـ .

4 ـ أ ب جـ د محدّب و أ ب = د جـ و أ د = ب جـ

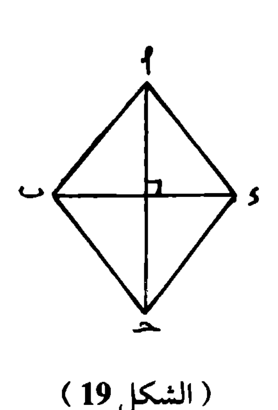
5 ـ أ ب جـ د محدّب وَ أ̂ = جـ̂ وَ ب̂ = د̂



(الشكل 18)

3.4 ـ المعيّن :

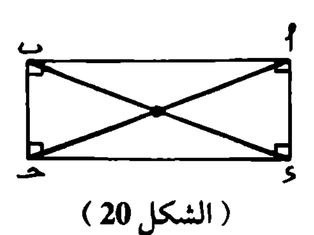
- المعيّن هو متوازي أضلاع له ضلعان متجاوران متقايسان
- يكون متوازي أضلاع معيّناً إذا وفقط اذا كان قطراه متعامدين
- يكون الرباعي المحدّب معيّنا إذا وفقط إذا كانت أضلاعه الأربعة متقايسة
- إذا كان أ ب حـ د معيّناً فإن
المستقيم (أ حـ) ينصف كلا من الزاويتين $\hat{أ}$ و $\hat{حـ}$
المستقيم (ب د) ينصف كلا من الزاويتين $\hat{ب}$ و $\hat{د}$



(الشكل 19)

4.4 ـ المستطيل :

- المستطيل هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة .
- يكون رباعي محدّب مستطيلاً إذا وفقط إذا كانت زواياه الأربع قائمة
- يكون متوازي أضلاع مستطيلاً إذا وفقط إذا كان قطراه متقايسين



(الشكل 20)

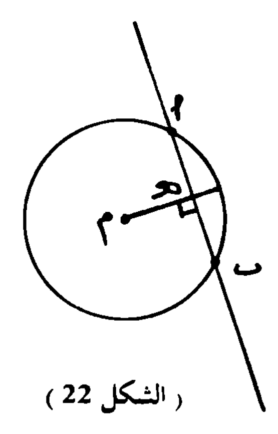
5.4 ـ المربع :

المربع هو معيّن وكذلك مستطيل
زواياه الأربع قائمة وأضلاعه الأربعة متقايسة
قطراه متقايسان ومتعامدان ويتقاطعان في منتصفهما .

(الشكل 21)

5 ـ الدائرة :

1.5 ـ الدائرة والقرص :



(الشكل 22)

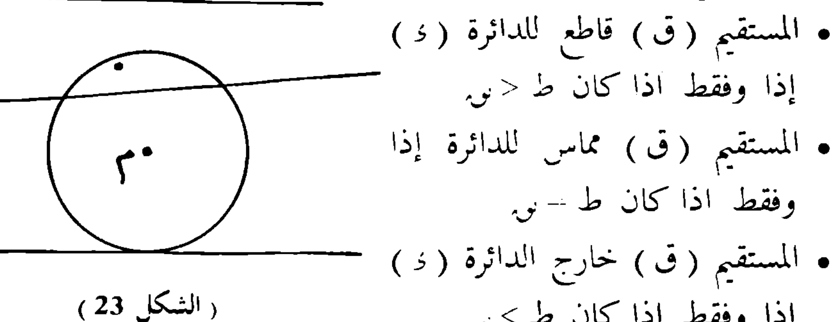
- الدائرة ذات المركز م ونصف القطر نق هي مجموعة النقط هـ من المستوي حيث م هـ = نق
- القرص المفتوح الذي مركزه م ونصف قطره نق هو مجموعة النقط هـ من المستوي حيث م هـ < نق
- القرص المغلق الذي مركزه م ونصف قطره نق هو مجموعة النقط هـ من المستوي حيث م هـ ≤ نق
- إذا كان [ا ب] وتراً لدائرة ذات المركز م وكانت النقطة هـ منتصف [ا ب] يكون المستقيمان (م هـ) و (ا ب) متعامدين (الشكل 22)
- إذا كان [ا ب] وتراً لدائرة فإن القطر العمودي عليه يشمل منتصفه .

2.5 ـ الأوضاع النسبية لمستقيم ودائرة :

(د) دائرة ذات المركز م ونصف القطر نق

و (ق) مستقيم ، ط المسافة بين النقطة م والمستقيم (ق)

لدينا ما يلي :



(الشكل 23)

- المستقيم (ق) قاطع للدائرة (د) إذا وفقط اذا كان ط < نق
- المستقيم (ق) مماس للدائرة إذا وفقط اذا كان ط = نق
- المستقيم (ق) خارج الدائرة (د) إذا وفقط اذا كان ط > نق

3.5 ـ الأوضاع النسبية لدائرتين :

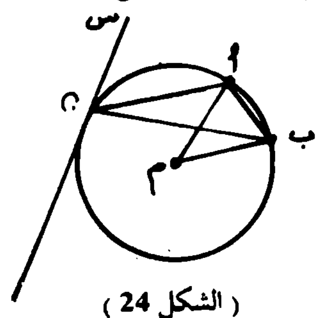
لتكن (ى) الدائرة ذات المركز م ونصف القطر نق
و (ى′) الدائرة ذات المركز م′ ونصف القطر نق′

إن :

م م′ < | نق − نق′ | ⟸ إحدى الدائرتين داخل الأخرى
م م′ = | نق − نق′ | ⟸ (ى) و (ى′) متماستان من الداخل
| نق − نق′ | < م م′ < نق + نق′ ⟸ (ى) و (ى′) متقاطعتان
م م′ = نق + نق′ ⟸ (ى) و (ى′) متماستان من الخارج
م م′ > نق + نق′ ⟸ (ى) و (ى′) خارجيتان .

4.5 ـ الزاوية المركزية والزاوية المحيطية :

- (ى) دائرة ذات المركز م . أ ، ب ، ج ثلاث نقط من هذه الدائرة .
- الزاوية [م أ ، م ب] تسمى زاوية مركزية
نقول عن الزاوية الناتئة [م أ ، م ب] إنها تحصر القوس ⌒أ ب.



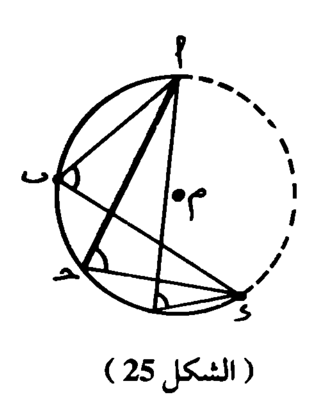
(الشكل 24)

- الزاوية [ج أ ، ج ب] تسمى زاوية محيطية . نقول عن الزاوية الناتئة [ج أ ، ج ب] إنها تحصر القوس ⌒أ ب .

- إذا كان نصف المستقيم [ج س) مماساً للدائرة (ى) نقول عن الزاوية [ج أ ، ج س] إنها أيضا زاوية محيطية وهي تحصر القوس ⌒أ ج .

5.5 ـ التذكير ببعض النتائج الهامة :

- قَيْس قوس من الدائرة ، هو قيْس الزاوية المركزية التي تحصر هذه القوس .
- قَيْسُ الزاوية المحيطية في دائرة يساوي نصف قَيْس الزاوية المركزية المرتبطة بها .



(الشكل 25)

- كل الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس أو التي تحصر أقواساً متقايسة تكون متقايسة .
- يكون الرباعي المحدّب ا ب حـ ى دائرياً إذا كانت الزاويتان [ب ا ، ب ى] و [حـ ا ، حـ ى] . متقايستين
- يكون الرباعي المحدّب ا ب حـ ى دائرياً إذا كانت الزاويتان المتقابلتان [ب ا ، ب حـ] وَ [ى ا ، ى حـ] متكاملتين .

تمرين محلول :

ا ب حـ مثلث متساوي الساقين حيث :
ا ب = ا حـ و ب حـ < ا ب . محور القطعة المستقيمة [ا حـ] يقطع المستقيم (ب حـ) في النقطة ى .
هـ نقطة من المستقيم (ا ى) حيث ا ∈ [هـ ى] و ا هـ = ب ى .
اثبت أن المثلث حـ ى هـ متساوي الساقين .

الحل :

بما أن ء تنتمي إلى محور [ا حـ] يكون المثلث ا ء حـ متساوي الساقين ومنه

$\widehat{ا حـ ء} = \widehat{حـ ا ء}$ (1)

و

ا ء = حـ ء (1')

(الشكل 26)

كذلك المثلث ا ب حـ متساوي الساقين إذن : $\widehat{ا حـ ب} = \widehat{ا ب حـ}$ (2)

من المساوايات (1) و (2) و $\widehat{ا حـ ب} = \widehat{ا حـ ء}$

نستنتج المساواة $\widehat{حـ ا ء} = \widehat{ا ب حـ}$ (3)

من المساوايات : $\widehat{حـ ا ء} = \widehat{ا ب حـ}$ (3) . $\widehat{هـ ا حـ} = 180° - \widehat{حـ ا ء}$

و $\widehat{ء ب ا} = 180° - \widehat{ا ب حـ}$

نستنتج : $\widehat{هـ ا حـ} = \widehat{ء ب ا}$.

المثلثان هـ ا حـ . ء ب ا متقايسان لأن $\widehat{هـ ا حـ} = \widehat{ء ب ا}$ وَ هـ ا = ء ب وَ ا حـ = ا ب

نستنتج عندئذ : هـ حـ = ء ا . ومنه هـ حـ = ء حـ لان ء ا = ء حـ (1)

إذن : المثلث حـ ء هـ متساوي الساقين .

10 مجموعات النقط من المستوى

1 ـ مقدمـة

نسمي (ى) مجموعة النقط من المستوي التي لها خاصة معينة . دراسة (ى) تعني دراسة تساوي (ى) مع مجموعة أخرى معرفة

مثلا :

إذا كانت ا وَ ب نقطتين مختلفتين فإن المجموعة (ى) للنقط ﻫ من المستوي التي تحقق ﻫ ا = ﻫ ب هي المحور (ك) للقطعة [ا ب] .

نكون قد برهنا على تساوي المجموعتين (ى) وَ (ك) إذا برهنا أن :

- 1) كل نقطة من (ى) تنتمي إلى (ك) أي (ى) ⊂ (ك)
- 2) كل نقطة من (ك) تنتمي إلى (ى) أي (ك) ⊂ (ى)

2 ـ مجموعة النقط المتساوية المسافة عن مستقيمين متوازيين

(ن) وَ (نَ) مستقيمان متوازيان و (ى) مجموعة نقط المستوي المتساوية المسافة عن المستقيمين (ن) وَ (نَ) :

- في حالة تطابق (ن) وَ (نَ) فإنه واضح أن المجموعة (ى) هي المستوي .
- نفرض فيما يلي أن (ن) وَ (نَ) متمايزان .

لتكن ك نقطة معلومة من (ن) وَ كَ مسقطها العمودي على (نَ) وَ م منتصف [ك كَ]

(Δ) المستقيم الذي يشمل م ويوازي (ن) و (نَ)

أولا : لتكن ﻫ نقطة من (ى) وَ ﻫ مسقطها العمودي على (ن) وَ ﻫَ مسقطها العمودي على (نَ)

لدينا ﻫ ﻫ = ﻫ ﻫَ لأن ﻫ تنتمي إلى (ى)

ﻫ ، ﻫ ، ﻫَ على استقامة واحدة لأنه يوجد مستقيم وحيد يشمل ﻫ وعمودي على (ن) وَ (نَ) وبالتالي فإن ﻫ هي منتصف القطعة [ﻫ ﻫَ]

بما أن ك ﻫ ﻫَ كَ مستطيل وَ م وَ ﻫ منتصفي [ﻫ ﻫَ] وَ [ك كَ] على الترتيب فإن (م ﻫ) **موازي للمستقيمين (ن) وَ (نَ) ومنطبق على (Δ)**

إذن النقطة ﻫ تنتمي إلى المستقيم الثابت (Δ) الذي يشمل م ويوازي (ن) وَ (نَ)

خلاصة ما سبق : **كل نقطة من (ى) تنتمي إلى (Δ)**

ثانيا :

لتكن نقطة هـ من (∆)

ق مسقطها العمودي على (ں)

ق′ مسقطها العمودي على (ں′)

لدينا :

ق هـ = ك م لأن م ك ق هـ مستطيل

ق′ هـ = ك′ م لأن م ك′ ق′ هـ مستطيل

م ك = م ك′ لأن م منتصف [ك ك′]

إذن : هـ ق = هـ ق′ وبالتالي النقطة هـ تنتمي إلى (ى)

خلاصة ما سبق :

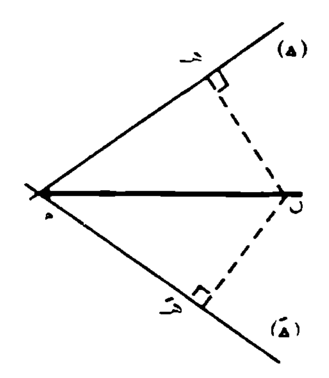
كل نقطة من (∆) تنتمي إلى (ى)

إذن المجموعتان (ى) و (∆) متساويتان

النتيجة :

(ں) وَ (ں′) مستقيمان متوازيان ومتمايزان ك نقطة معلومة من (ں) و ك′ مسقطها العمودي على (ں′) وَ م منتصف [ك ك′] إن مجموعة نقط المستوي المتساوية المسافة عن (ں) وَ (ں′) هي المستقيم الذي يشمل م ويوازي (ں) وَ (ں′)

3 ـ مجموعة النقط المتساوية المسافة عن مستقيمين متقاطعين



(∆) وَ (∆′) مستقيمان متقاطعان وَ م نقطة تقاطعهما

(ى) مجموعة نقط المستوي المتساوية المسافة عن المستقيمين (∆) وَ (∆′)

نلاحظ أن النقطة م تنتمي إلى (ى)

أولا : لتكن ق نقطة من (ى) تختلف عن م وليكن هـ مسقطها العمودي على (∆) وَ هـ′ مسقطها العمودي على (∆′)

لدينا : ق هـ = ق هـ′

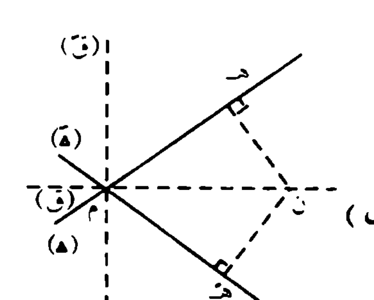
والمثلثان القائمان م هـ ﻫ وَ م هـ' ﻫ متقايسان لأن لهما نفس الوتر [م ﻫ] والضلعان [ﻫ هـ] وَ [ﻫ هـ'] متقايسان

نستنتج أن $\widehat{هـ م ﻫ} = \widehat{هـ' م ﻫ}$ ومنه فإن (م ﻫ) أحد منصفي (ن) وَ (ن') للزوايا المحصورة بين المستقيمين (Δ) و (Δ')

خلاصة ما سبق : **كل نقطة من (ى) تنتمي إلى أحد المنصفين (ن) وَ (ن') للزوايا المحصورة بين (Δ) وَ (Δ')**

ثانيا : لتكن ﻫ نقطة من (ن) أو (ن') وليكن هـ مسقطها العمودي على (Δ) وَ هـ' مسقطها العمودي على (Δ').

- إذا كانت ﻫ منطبقة على م فإنه واضح أن ﻫ تنتمي إلى (ى)
- إن كانت ﻫ تختلف عن م فإن المثلثين القائمين م هـ ﻫ وَم هـ' ﻫ متقايسان لأن لهما نفس الوتر [م ﻫ] وزاويتان حادتان متقايستان $\widehat{هـ م ﻫ} = \widehat{هـ' م ﻫ}$



وبالتالي نستنتج أن ﻫ هـ = ﻫ هـ'

إذن ﻫ تنتمي إلى (ى)

خلاصة ما سبق :

كل نقطة من (ن) أو (ن') **تنتمي إلى (ى)**

إذن المجموعتان (ى) وَ (ن) ∪ (ن') متساويتان

النتيجة :

مجموعة نقط المستوي المتساوية المسافة عن مستقيمين متقاطعين (Δ) وَ (Δ') هي مجموعة اتحاد منصفي الزوايا المحصورة بين (Δ) وَ (Δ')

4 ـ مجموعة النقط ﻫ بحيث تكون المسافة بين النقطة ﻫ ومستقيم (Δ) ثابتة

(Δ) مستقيم وَ

α عدد حقيقي موجب

نسمي (ى) مجموعة النقط ﻫ بحيث تكون المسافة بين النقطة ﻫ والمستقيم (Δ) تساوي α .

ليكن (ن) مستقيما عموديا على (Δ) . توجد في (ن) نقطتان ﻫ٥ وَ ﻫ'٥ تنتميان إلى (ى) . ﻫ٥ وَ ﻫ'٥ متناظرتان بالنسبة إلى (Δ)

نلاحظ أنه إذا كانت نقطة تنتمي إلى (ى) فإن نظيرتها بالنسبة إلى (Δ) تنتمي إلى (ى)

إذن يكفي أن ندرس المجموعة (ى) في نصف المستوي (π_0) المحدد بالمستقيم (Δ) ويشمل النقطة ن$_0$. لندرس هذه المجموعة

أولا : لتكن ن نقطة من (π_0) تنتمي إلى (ى) نسمي هـ$_0$ وَ هـ المسقطين العموديين للنقطتين ن$_0$ وَ ن على المستقيم (Δ)

الرباعي ن هـ هـ$_0$ ن$_0$ متوازي الأضلاع لأن ن$_0$ هـ$_0$ = ن هـ وَ ن$_0$ هـ$_0$ // ن هـ

إذن : **النقطة ن تنتمي إلى المستقيم (ل) الذي يشمل ن$_0$ ويوازي (Δ)**

ثانيا : لتكن نَ نقطة من المستقيم (ل) وَ هـَ مسقطها العمودي على (Δ)

الرباعي نَ هـَ هـ$_0$ ن$_0$ متوازي الأضلاع لأن ن$_0$ نَ // هـَ هـ$_0$ و نَ هـَ // ن$_0$ هـ$_0$

إذن : نَ هـَ = ن$_0$ هـ$_0$ = α وبالتالي :

المسافة بين النقطة ن والمستقيم (Δ) تساوي α نستنتج من الدراسة السابقة أن مجموعة النقط ن من (π_0) التي تنتمي إلى (ى) هي المستقيم (ل)

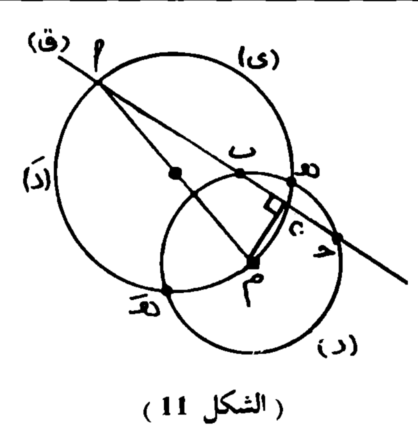
المجموعة (ى) هي اتحاد المستقيمين (ل) و (لَ) المتناظرين بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

النتيجة :

مجموعة النقط ن من المستوي بحيث تكون المسافة بين ن والمستقيم (Δ) ثابتة هي مجموعة نقط مستقيمين متناظرين بالنسبة إلى المستقيم (Δ) وموازيين له

5 - تمرين محلول :

(ﺩ) دائرة مركزها م . أ نقطة تقع خارج (ﺩ) . (ق) مستقيم متغير يشمل أ ويقطع (ﺩ) في النقطتين ب ، ﺣ .
نسمي ﻫ منتصف القطعة [ب ﺣ] . ادرس مجموعة النقط ﻫ ؟



(الشكل 11)

أولاً : نسمي (ى) المجموعة المطلوبة ؛ ﻫ نقطة من (ى) المستقيم (م ﻫ) عمودي على المستقيم (ب ﺣ) لأن ﻫ هي منتصف الوتر [ب ﺣ] في الدائرة (ﺩ) إذن الزاوية [ﻫ م ، ﻫ أ] قائمة والنقطة ﻫ تنتمي إلى الدائرة (ﺩَ) ذات القطر [أ م] .

بما أن النقطة ﻫ تنتمي إلى القطعة [ب ﺣ] فإنها تقع داخل الدائرة (ﺩ) فهي إذاً تنتمي إلى القوس ﻫ م ﻫَ من الدائرة (ﺩَ) .

إذا سمينا (γ) القوس ﻫ م ﻫَ يمكننا أن نكتب :

$$ﻫ \in (ى) \Leftarrow ﻫ \in (\gamma) \quad (1)$$

ثانياً : لتكن ﻫ نقطة من المجموعة (γ) .

بما أن ﻫ تقع داخل الدائرة (ﺩ) و أ خارجها فإن المستقيم (أ ﻫ) يقطع (ﺩ) في النقطتين ب ، ﺣ

الزاوية [ﻫ م ، ﻫ أ] قائمة : إذن المستقيم (م ﻫ) عمودي على الوتر [ب ﺣ] للدائرة (ﺩ) وبالتالي تكون نقطة تقاطع (م ﻫ) مع [ب ﺣ] هي منتصف القطعة [ب ﺣ] .

إذن النقطة ﻫ تنتمي إلى (ى) وهذا يسمح لنا أن نكتب :

$$ﻫ \in (\gamma) \Leftarrow ﻫ \in (ى) \quad (2)$$

نستنتج من (1) وَ (2) أن المجموعة المطلوبة هي القوس (γ) .

11 الإنشاءات الهندسية

1 ـ مسائل الإنشاء الهندسي :

• نكون قد عالجنا مسألة إنشاء هندسي إذا :

1) استطعنا أن نعطي القواعد الدقيقة التي تسمح لنا بإنجاز الشكل الهندسي المطلوب .

2) استطعنا أن نحدّد عدد الحلول في كل حالة من الحالات الممكنة .

• تتضمن كل دراسة في الإنشاء الهندسي مرحلتين :
مرحلة التحليل ومرحلة التركيب والإنشاء .

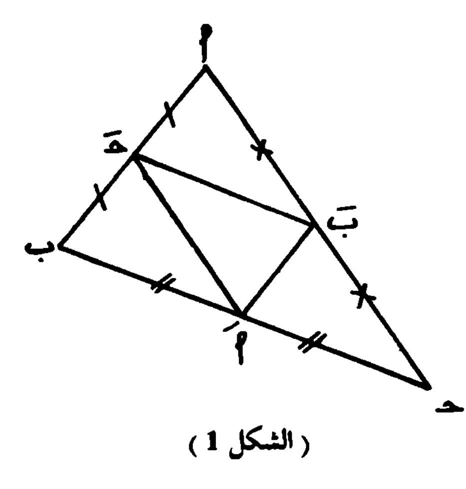
مرحلة التحليل : نفرض أن المسألة تقبل حلا على الأقل ونرسم الشكل الهندسي المناسب . ثم باستعمال المعطيات ندرس هذا الشكل وكل الارتبطات الموجودة بين عناصره ونستخرج القواعد التي تسمح لنا بانجاز إلشكل الهندسي المطلوب .

مرحلة التركيب والإنشاء : انطلاقا من القواعد المستخرجة سابقا ندرس خطوة بعد خطوة الإنشاء المطلوب ونحدّد في كل حالة عدد الحلول وكيفية رسم هذه الحلول

2 ـ التمرين 1 :

يعطى المثلث ا' ب' ح' ، أنشيء مثلثا ا ب ح بحيث تكون النقط ا' ، ب' ، ح' منتصفات الأضلاع [ب ح] ، [ح ا] ، [ا ب] على الترتيب ..

التحليل :



(الشكل 1)

نفرض أنه يوجد مثلث أ ب ح بحيث تكون أ′ ، ب′ ، ح′ منتصفات الأضلاع [ب ح] ، [ح أ] ، [أ ب] على الترتيب .

بما أن ب′ منتصف الضلع [أ ح] و ح′ منتصف الضلع [أ ب] نعلم أن (ب′ ح′) // (ح ب)

إذن النقطتان ب ، ح تنتميان إلى المستقيم الذي يشمل النقطة أ′ ويوازي المستقيم (ب′ ح′) وبنفس الطريقة نستطيع أن نبرهن على أن النقطتين أ ، ب تنتميان إلى المستقيم الذي يشمل النقطة ح′ ويوازي المستقيم (أ′ ب′) وَأن النقطتين أ ، ح تنتميان إلى المستقيم الذي يشمل النقطة بَ وَيوازي المستقيم (أ′ ح′)

الإنشاء :

لنرسم المستقيم (ق$_1$) الذي يشمل أ′ ويوازي (ب′ ح′) وَالمستقيم (ق$_2$) الذي يشمل ب′ ويوازي (أ′ ح′) والمستقيم (ق$_3$) الذي يشمل ح′ وَيوازي (أ′ ب′) المستقيمات (ق$_1$) ، (ق$_2$) ، (ق$_3$) تتقاطع مثني مثني لأن المستقيمات الموازية لها (ب′ ح′) ، (أ′ ح′) (أ′ ب′) تتقاطع مثني مثني (الشكل 2)

(الشكل 2)

بما أن (حـ ب′ حـ′ ا′) وَ (ا′ ب′ حـ′ ب) متوازيا أضلاع فإن ∴
حـ ا′ = ب′ حـ′ وَ ب′ حـ′ = ا′ ب
إذن : حـ ا′ = ا′ ب وَهذا يعني أن ا′ هي منتصف الضلع [ب حـ] بنفس الطريقة نستطيع أن نبرهن أن ب′ هي منتصف [ا حـ] وَ حـ′ منتصف [ا ب]
إذن المثلث ا ب حـ حلّ للمسألة وهذا الحل وحيد لأن كل مستقيم من المستقيمات (ق$_1$) (ق$_2$) (ق$_3$) وحيد وَنقطة تقاطع مستقيمين وحيدة .

3 ـ التمرين 2 :

(ق) مستقيم وَ ا نقطة لاَ تنتمي إلى (ق) أنشيء دائرة تشمل ا وَ تمس (ق)

التحليل :
نفرض أنه توجد دائرة (ى) تشمل ا وتمس (ق) في النقطة هـ (الشكل 3)
مركز الدائرة (ى) هو نقطة تقاطع المستقيم العمودي على (ق) في هـ مع محور القطعة [ا هـ]

(الشكل 3)

الإنشاء : لتكن هـ′ نقطة كيفية ن (ق) بما أن ا ≠ هـ′ فإن محور القطعة [ا هـ′] موجود .
نسمي (Δ) هذا المحور وَ (Δ′) المستقيم العمودي على (ق) في النقطة هـ′ .

بما أن المستقيمين (اهـ′) وَ (ق)

متقاطعان فإن المستقيمين (△) و (△′) يتقاطعان في النقطةم′ .

الدائرة التي مركزها م′ ونصف قطرها م′ا حلّ للمسألة

نلاحظ أن للمسألة ما لا نهاية من الحلول لأن النقطة هـ′ المعتبرة هنا كيفية من المستقيم (ق)

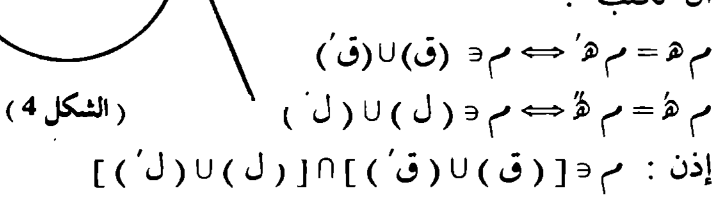
4 ـ تمارين 3 :

يُعْطى مثلث ا ب حـ . أنشيء دائرة تمس المستقيمات الثلاثة (ا ب) ، (ب حـ) و (حـ ا) .

التحليل : نفرض أنه توجد دائرة تمس المستقيمات (ا ب) ، (ب حـ) (حـ ا) في النقط هـ ، هـ′،هـ″ على التوالي . نسمي م مركز هذه الدائرة هـ ، هـ′ ، هـ″ هي المساقط العمودية للنقطة م على المستقيمات (ا ب) ، (ب حـ) ، (حـ ا) بهذا الترتيب (الشكل 4)

لدينا : م هـ = م هـ′ و م هـ′ = م هـ″

إذا سمّينا (ق) وَ (ق′) منصفي الزوايا المحصورة بين (ا ب) وَ (ب حـ) وَ (ل) وَ (ل′) منصفي الزوايا المحصورة بين (ب حـ) وَ (حـ ا) يمكن أن نكتب :



(الشكل 4)

م هـ = م هـ′ ⟸ م ∈ (ق) ∪ (ق′)

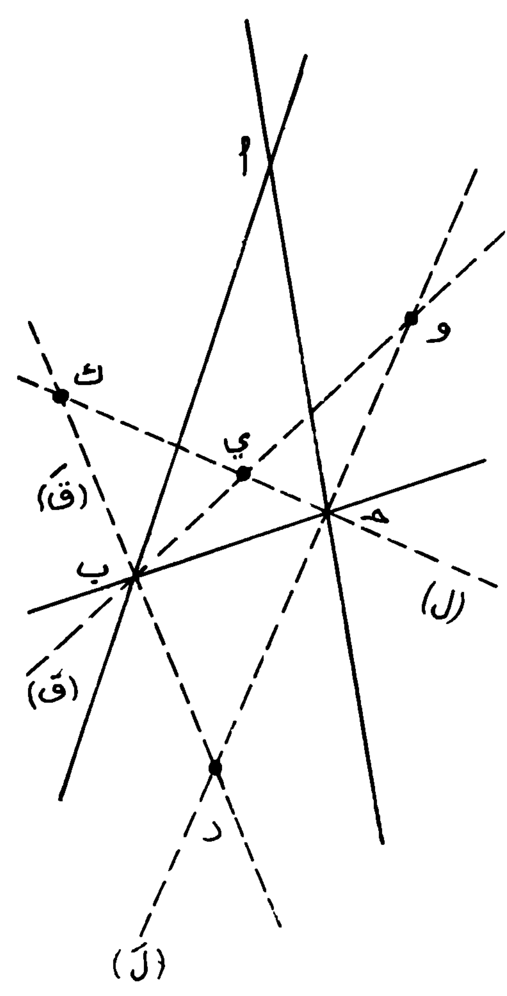
م هـ′ = م هـ″ ⟸ م ∈ (ل) ∪ (ل′)

إذن : م ∈ [(ق) ∪ (ق′)] ∩ [(ل) ∪ (ل′)]

وهذا يعني :

م∈[(ق)∩(ل)]∪[(ق)∩(لَ)]∪[(قَ)∩(ل)]∪[(قَ)∩(لَ)]

الإنشاء : في المثلث أ ب حـ (الشكل 5)



(الشكل 5)

نعلم أن :

1) المنصفين الداخليين (ق) و (ل) يتقاطعان في النقطة ي التي هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث

2) • المنصف الداخلي (ق) والمنصف الخارجي (لَ) يتقاطعان في النقطة و

• المنصف الخارجي (قَ) والمنصف الداخلي (ل) يتقاطعان في النقطة ك

• المنصفين الخارجيين (قَ) وَ (لَ) يتقاطعان في النقطة ر

النقط و ، ك ، ر هي مراكز الدوائر الثلاث التي تمس المثلث أ ب حـ من الخارج

إذن توجد أربع دوائر تمس المستقيمات الثلاثة (أ ب) ، (ب حـ) ، (حـ أ) .

تمارين

المفاهيم الأساسية في الهندسة :

1. في المثلث أ ب ح الزاوية [أ ب ، أ ح] منفرجة . ء ، هـ نقطتان من [ب ح]
حيث : $\widehat{ب أ ء} = \widehat{أ ح ب}$ وَ $\widehat{هـ أ ح} = \widehat{أ ب ح}$
أثبت أن المثلث أ ء هـ متساوي الساقين .

2. أ ب ح مثلث . (ق) هو المستقيم المرسوم من أ عموديا على (أ ب) . المنصف الداخلي للزاوية ب يقطع المستقيم (ق) في النقطة ء ويقطع العمود (أهـ) المتعلق بالضلع [ب ح] في النقطة ي .
أثبتْ أنّ المثلث أ ي ء متساوي الساقين .

3. أ ب ح مثلث حيث $\hat{أ} = 3\,\hat{ب}$. ء نقطة تنتمي إلى القطعة [ب ح] بحيث يكون ح ء = ح أ
أثبت أن المثلث ء أ ب متساوي الساقين .

4. أ ب ح مثلث قائم في أ وَ (أ هـ) العمود المتعلق بالوتر [ب ح] . المنصف الداخلي للزاوية [أ ب ، أ هـ] والمنصف الداخلي للزاوية [أ هـ ، أ ح] يقطعان على الترتيب الوتر في النقطتين ك ، ل
أثبت أن

أ ب = ب ل

أ ح = ح ك

أ ب + أ ح = ب ح + ك ل

5. أ ب ح مثلث متساوي الساقين حيث أ ب = أ ح وَ ب ح > أ ب . محور القطعة [أ ح] يقطع المستقيم (ب ح) في النقطة ء . هـ نقطة من المستقيم (أ ء) حيث أ ∈ [ء هـ] وَ أ هـ = ب ء
أثبت أن المثلث ح ء هـ متساوي الساقين

6. ا ب حـ مثلث متقايس الأضلاع . ا′ ، ب′ ، حـ′ ثلاث نقط حيث
ا ∈ [حـ ب′] ، ب ∈ [ا حـ′] ، حـ ∈ [ا′ ب] وَ ب حـ′ = حـ ا′ = ا ب′
أثبت أن المثلث ا′ ب′ حـ′ متقايس الأضلاع
لتكن : د نقطة تقاطع المستقيمين (ا ا′) ، (ب ب′) : هـ نقطة تقاطع المستقيمين (ب ب′) ، (حـ حـ′) .
ي نقطة تقاطع المستقيمين (حـ حـ′) ، (ا ا′)
أثبت أن المثلث د هـ ي متقايس الأضلاع (يمكن مثلا البرهان على أنّ $\widehat{\text{ا د ب}} = 60^\circ$)

7. ا ب حـ مثلث ؛ ء نقطة تنتمي إلى القطعة [ب حـ] . المستقيم الذي يشمل ء ويوازي (ا ب) يقطع الضلع [ا حـ] في ي . المستقيم الذي يشمل ي ويوازي (ب حـ) يقطع الضلع [ا ب] في هـ
أثبت أن : (ا ء منصف داخلي للزاوية [ا ب ، ا حـ]) ⟺ (ا ي = ب هـ)

8. ا ب حـ مثلث ؛ هـ نقطة تقاطع أعمدته . المستقيم المرسوم من ب عمودياً على (ا ب) والمستقيم المرسوم من حـ عموديا على (ا حـ) يتقاطعان في النقطة ك .
أثبت أن القطعتين [ب حـ] وَ [هـ ك] لهما نفس المنتصف
أثبت أن مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ا ب حـ هو منتصف القطعة [ا ك]

9. ا ب حـ مثلث قائم في ا . ء ؛ ي نقطتان حيث : ا ∈ [حـ ء] وَ ا ء = ا ب وَ ا ∈ [ب ي] وَ ا ي = ا حـ
أثبت أن العمود المتعلق بالضلع [ب حـ] في المثلث ا ب حـ والمتوسط المتعلق بالضلع [ء ي] في المثلث ا ء ي متطابقان

10. ا ب حـ مثلث . نرسم خارج هذا المثلث المربعين ا ب ء ب′ وَ ا حـ ي حـ′
أثبت أن ب حـ′ = حـ ب′ وَ (ب حـ′) عمودي على (حـ′ ب)

11. $ا ب حـ$ مثلث . $ا'$ منتصف القطعة [ب حـ] . و $د$ نظيرة النقطة ا بالنسبة إلى النقطة $ا'$.

1) قارن المثلثين $ا'ا حـ$ وَ $ا'د ب$

2) أثبت أن : $\frac{ا ب + ا حـ - ب حـ}{2} < ا ا' < \frac{ا ب + ا حـ}{2}$

3) نسمي $ب'$ منتصف القطعة [ا حـ] . و $حـ'$ منتصف القطعة [ا ب]

أثبت أن :

$$\frac{ا ب + ب حـ + حـ ا}{2} < ا ا' + ب ب' + حـ حـ' < ا ب + ب حـ + حـ ا$$

12. $ا ب حـ$ مثلث . نسمي $ا'$. $ب'$. $حـ'$ المساقط العمودية للنقط ا . ب . حـ على المستقيمات (ب حـ) . (حـ ا) . (ا ب) على الترتيب .

أثبت أن $ا ا' + ب ب' + حـ حـ' < ا ب + ب حـ + حـ ا$.

13. $ا ب حـ$ مثلث وَ م نقطة داخل هذا المثلث .

أثبت أن : $\frac{ا ب + ب حـ + حـ ا}{2} < م ا + م ب + م حـ < ا ب + ب حـ + حـ ا$.

14. $ا ب حـ$ مثلث حيث $ا ب \neq ا حـ$. م منتصف [ب حـ] و هـ مسقط النقطة ا على المستقيم (ب حـ). نفرض أن $ب حـ = 2 ا هـ$

أدرس المتباينات بين الزوايا والأضلاع في كلّ من المثلثين ب م ا . حـ م ا

ثم أثبت أن الزاوية [ا ب ، ا حـ] حادة .

15. $ا ب حـ$ مثلث حيث $\hat{ب} = 2 \hat{حـ}$. ي نقطة تنتمي إلى [ب حـ] . د نقطة حيث :

$ب \in [ا د]$ وَ $ب د = ب ي$. المستقيم (د ي) يقطع المستقيم (ا حـ) في النقطة ل

أثبت أن المثلث ل ي حـ متساوي الساقين .

أوجد وضع النقطة ل إذا كانت ي المسقط العمودي للنقطة ا على المستقيم (ب حـ)

16. ا ب حـ ء شكل رباعي . ل ، م ، ﻫ ، ﻫ ، و ، ي منتصفات القطع
[ا ب] ؛ [ب حـ] ؛ [حـ ء] ؛ [ء ا] ؛ [ا حـ] ؛ [ب ء] على الترتيب .
أثبت أن [ل ﻫ] ، [م ﻫ] ، [و ي] تتقاطع في نقطة واحدة .

17. ا ب حـ مثلث زواياه حادة . النقطة ا′ هي المسقط العمودي للنقطة ا .
على المستقيم (ب حـ) . النقطتان م ، ﻫ نظيرتا النقطة ا′ بالنسبة إلى المستقيمين
(ا ب) و (ا حـ) على الترتيب .
1) أثبت أن [م ﻫ] و [ا ب] يتقاطعان في نقطة م′ و [م ﻫ] و [ا حـ]
يتقاطعان في نقطة ﻫ′
2) بيّن أن (ا ب) ، (ا حـ) منصفان خارجيان للمثلث ا′ م′ ﻫ′ . ماذا يمثل
(ا ا′) في هذا المثلث ؟
3) بيّن أن (ب ﻫ′) ، (حـ م′) يتقاطعان في نقطة ﻫ تنتمي إلى (ا ا′) .
ماذا تمثل النقطة ﻫ في المثلث ا ب حـ ؟ وفي المثلث ا′ م′ ﻫ′ ؟

18. ا ب حـ مثلث قائم في ا . النقطة ا′ هي المسقط العمودي للنقطة ا على المستقيم
(ب حـ) . النقطة ﻫ هي مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب ا′ والنقطة ي
هي مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ا حـ ا′
1) احسب $\widehat{ﻫ ا ي}$
2) ليكن ل مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب حـ . بيّن أن ل هي نقطة
تلاقي أعمدة المثلث ا ﻫ ي
3) بيّن أن : ا ل = ﻫ ي

19. ا ب حـ مثلث زواياه حادة . ا′ ، ب′ ، حـ′ هي المساقط العمودية للنقط .
ا ، ب ، حـ على المستقيمات (ب حـ) ، (حـ ا) (ا ب) على الترتيب . ﻫ هي
نقطة تلاقي أعمدة المثلث ا ب حـ
- أثبت أن الرّباعيين (ا′ ب حـ′ ﻫ) وَ (ا′ حـ ب′ ﻫ) دائريان
- استنتج أن (ا ا′) منصف زاوية في المثلث ا′ ب′ حـ′
ماذا تمثل النقطة ﻫ في هذا المثلث ؟
- ادرس نفس المسألة عندما تكون الزاوية [ا ب ، ا حـ] منفرجة .

20. ا ب حـ مثلث قائم في ا . نرسم خارج هذا المثلث المربّعين (ا ب ب′ ب″)
و (ا حـ حـ′ حـ″)

1) أثبت أن النقط ب′ ، ا ، حـ′ على استقامة واحدة

2) نسمي هـ المسقط العمودي للنقطة ا على (ب حـ) وَ م منتصف [ب″ حـ″] . بيّن أن النقط م ، ا ، هـ على إستقامة واحدة

3) لتكن ل نقطة تقاطع (ب′ ب″) و (حـ′ حـ″) . بيّن أنّ ل تنتمي إلى المستقيم (ا هـ)

4) بيّن أنّ : ب′ حـ = ب ل و (ب′ حـ) ⊥ (ب ل) و ب خ′ = حـ ل وَ (ب حـ′) ⊥ (حـ ل)
استنتج أن المستقيمات الثلاثة (ب′ حـ) ، (ب حـ″) ، (هـ ل) تتقاطع في نقطة واحدة

21. (ى) دائرة مركزها م ، [ا ب] قطر لهذه الدائرة . (ق) مماس (ى) في النقطة ب . لتكن ن نقطة من (ى) ، مماس (ى) في ن يقطع (ا ب) في النقطة ك المستقيم (ق) يقطع المستقيمات (ن ك) ، (ن ا) ، (ن م) في النّقط ل ، هـ ، ي على الترتيب .

1) ماذا تمثل النقطة ل في المثلث م ك ي ؟

2) استنتج ممّا سبق أن (ن ا) عمودي على (ك ي)

3) بيّن أنّ (ا ي) و (ك هـ) متعامدان

22. (ى) وَ (ى′) دائرتان مركزاهما م ، م′ متماستان في النقطة ا . ن نقطة من مماسهما المشترك في النقطة ا . المماسان الباقيان المرسومان من ن يمسان (ى) وَ (ى′) في ت و ت′ على الترتيب . يتقاطع (م ت) و (م′ ت′) في ك .
بيّن أن (ن ك) هو محور [ت ت′] ثم استنتج أن ك هو مركز دائرة تمس (ى) وَ (ى′)

23. (ى) دائرة مركزها م ، [ا ب] قطر لهذه الدائرة ، حـ نقطة تنتمي إلى (ى) .
(ق) ، (ك) ، (ل) ، مماسات الدائرة (ى) في النقطة ا . ب . حـ على الترتيب .
(ل) يقطع (ق) و (ك) في ا′ و ب′ على الترتيب
بيّن أن المثلث ا′ م ب′ قائم
أثبت أن الدائرة المحيطة بهذا المثلث تمس (ا ب) في م

24. دائرتان (ى) ، (ى′) مركزاهما م ، م′ متماستان خارجيا في النقطة ا . (ل) مماسهما المشترك في النقطة ا و (ق) مماس مشترك خارجي لهاتين الدائرتين . (ق) يمس (ى) و (ى′) في النقطتين ب ، ب′ على الترتيب ويقطع (ل) في هـ
1) بيّن أن المثلثين ب ا ب′ وَ م هـ م′ قائمان
2) أثبت أن الدائرة المحيطة بالمثلث ب ا ب′ تمس (م م′) في ا وأنّ الدائرة المحيطة بالمثلث م هـ م′ تمس (ب ب′) في النقطة هـ . أثبت أن الوتر المشترك لهاتين الدائرتين يوازي (ب ب′)

25. α عدد حقيقي موجب غير معدوم و (ى) دائرة ؛ ا ، ن نقطتان متمايزتان تنتميان إلى (ى) ؛ ب ، ب′ نقطتان من المستقيم (ا ن) حيث ن ب = ن ب′ = α
بين أن المستقيمين المرسومين من ب و ب′ عموديا على (ا ن) يمسان دائرة ثابتة عندما تتغير النقطة ن على الدائرة (ى)

26. (ى) دائرة ، ي نقطة داخل هذه الدائرة ، (ق) ، (ق′) مستقيمان متعامدان مرسومان من النقطة ي . (ق) يقطع (ى) في ا وَ ب ، (ق′) يقطع (ى) في ا′ وَ ب′ ، هـ هي المسقط العمودي للنقطة ب′ على (ا ا′)
برهن أن ا′ ب′ منصف للزاوية [ب′ ب ، ب′ هـ]

27. ا ب حـ مثلث متقايس الأضلاع ، م مركز الدائرة (ى) المحيطة بهذا المثلث المستقيمان (ب م) و (حـ م) يقطعان (ى) في النقطتين ب′ ، حـ′ على الترتيب ، المستقيم (ب′ حـ′) يقطع [ا ب] ، [ا حـ] في ك ، ل على الترتيب
بيّن أن : ب′ ل = ك ل = ك حـ′ .

28. ا ب ح مثلث . (د) الدائرة المحيطة به . هـ نقطة تلاقي أعمدته . المستقيم (ا هـ) يقطع (د) في ك (ك ≠ ا)
قارن هـ ب ح . هـ ا ح . ك ب ح
استنتج أن ك هي نظيرة هـ بالنسبة إلى (ب ح) . (تدرس الحالة [ا ب . ا ح] زاوية حادة ثم الحالة [ا ب . ا ح] زاوية منفرجة)

29. ا ب ح مثلث غير متقايس الساقين . (د) الدائرة المحيطة به . المنصفان المرسومان من ا في المثلث ا ب ح يقطعان (ب ح) في ب′ . ح′ . المماس للدائرة (د) في النقطة ا يقطع (ب ح) في هـ .
أثبت أن هـ هو منتصف [ب′ ح′] .

30. (د) دائرة و [ا ب] وتر لها . ح منتصف إحدى القوسين المحددتين بالنقطتين ا . ب . هـ . و نقطتان متمايزتان تنتميان إلى [ا ب] . المستقيمان (ح هـ) . (ح و) يقطعان (د) في هـ′ . و′
برهن أن النقط و . هـ . و′ . هـ′ تنتمي إلى دائرة واحدة .

31. (د) دائرة مركزها م . (ق) مستقيم يشمل م . ا نقطة من (د) . مماس الدائرة (د) في النقطة ا يقطع المستقيم (ق) في النقطة ط . ب . ح هما نقطتان من المستقيم (ا ط) حيث ط ب = ط ح = ط م . ليكن (ق$_1$) . (ق$_2$) المستقيمين اللذين يوازيان (ق) ويشملان ب . ح على الترتيب
بين أنّ (ق$_1$) و (ق$_2$) يمسّان الدائرة (د)

32. (د) دائرة مركزها م ونصف قطرها α ؛ [ا ب] قطر للدائرة (د) . ط نقطة تنتمي إلى (د) حيث ط ≠ ا و ط ≠ ب
ح هي النقطة المعرفة كما يلي : ح ∋ [م ط] وَ ط ح = 2α
1) ماذا تمثل النقطة ط في المثلث ا ب ح ؟
2) ليكن ا′ . ب′ منتصفي القطعتين [ب ح] ، [ا ح] على الترتيب .
بين أن منتصف [ا′ ب′] ينتمي إلى (م ح)
3) بين أن الدائرة (د) والدائرة التي قطرها [ا′ ب′] متماستان خارجيا في النقطة ط .

مجموعات النقط :

33. [م س ، م ع] زاوية ثابتة . ﻫ نقطة متغيرة من [م س) وَ ي نقطة متغيرة من [م ع) حيث : م ﻫ = م ي .
عين مجموعة النقط ن من المستوي بحيث تكون النقطة ن منتصف القطعة [ﻫ ي]

34. ا ، ب نقطتان ثابتتان . ا ب ﺣ ء معيّن متغير .
عين مجموعة النقط ن من المستوي بحيث تكون النقطة ن منتصف القطعة [ﺣ ء]

35. ا ب ﺣ مثلث . عيّن مجموعة النقط ن من المستوي بحيث تكون ن مركز دائرة تشمل ا وَ ب وتكون ﺣ داخل هذه الدائرة .

36. [م س ، م ع] زاوية قائمة ثابتة . ط عدد حقيقي موجب ثابت .
ب نقطة متغيرة من [م س)، ﺣ نقطة متغيرة من [م ع) حيث ب ﺣ = ط .
1) عين مجموعة النقط ن من المستوي بحيث تكون النقطة ن منتصف القطعة [ب ﺣ]
2) عين مجموعة النقط ن′ من المستوي بحيث يكون الشكل الرباعي ا ب ن′ ﺣ مستطيلا .

37. ا ، ب نقطتان مختلفتان وثابتتان . (ق) مستقيم ثابت عمودي على (ا ب) .
ﻫ نقطة متغيرة من (ق) . المستقيم المرسوم من ا عموديا على (ا ﻫ)
والمستقيم المرسوم من ب عموديا على (ب ﻫ) يتقاطعان في النقطة ي .
عين مجموعة النقط ن من المستوي بحيث تكون النقطة ن منتصف القطعة [ﻫ ي]

38. ا ، ب نقطتان مختلفتان وثابتتان . (ق) مستقيم ثابت عمودي على (ا ب) .
ﻫ نقطة متغيرة من (ق) . المستقيم المرسوم من ب عموديا على (ا ﻫ) يقطع المستقيم (ق) في النقطة ي .
عين مجموعة النقط ن من المستوي بحيث تكون النقطة ن نقطة تقاطع المستقيمين (ا ﻫ) وَ (ب ي)

39. [م س ، م ع] زاوية قائمة ثابتة . ا نقطة ثابتة من منصف هذه الزاوية .
ﻫ نقطة متغيرة من [م س) . المستقيم المرسوم من ا عموديا على (ا ﻫ) يقطع [م ع) في النقطة ي .
عين مجموعة النقط ن من المستوي بحيث تكون النقطة ن منتصف القطعة [ﻫ ي]

40. (ى) دائرة مركزها م ونصف قطرها α .
عين مجموعة النقط ن من المستوي بحيث يكون المماسان المرسومان من ن للدائرة (ى) متعامدين .

41. ا ، ب نقطتان ثابتتان ، (ق) مستقيم متغير يشمل ب .
عين مجموعة النقط ن من المستوي بحيث تكون ن نظيرة ا بالنسبة إلى (ق)

42. (ى) ، (ى′) دائرتان مركزاهما م ، م′ على الترتيب .
ﻫ نقطة متغيرة من (ى) ، ﻫ′ نقطة متغيرة من (ى′) حيث م ﻫ ﻫ′ م′ شبه منحرف قاعدتاه [م ﻫ] ، [م′ ﻫ′] .
عين مجموعة النقط ن من المستوي بحيث تكون النقطة ن منتصف القطعة [ﻫ ﻫ′] .

43. ا ب حـ مثلث متساوي الساقين حيث ا ب = ا حـ . ﻫ نقطة متغيرة من [ب حـ] .
المستقيم المرسوم من ﻫ عموديا على (ب حـ) يقطع (ا ب) في ك و (ا حـ) في ل .
عين مجموعة النقط ن من المستوي بحيث تكون النقطة ن منتصف القطعة [ك ل] .

إنشاءات هندسية :

44. (ق) مستقيم ، ا نقطة خارج هذا المستقيم .
باستعمال المدور والمسطرة ارسم من ا المستقيم العمودي على (ق)

45. ب ، حـ نقطتان متمايزتان ؛ (ق) مستقيم .
أنشيء مثلثا متساوي الساقين ا ب حـ قاعدته [ب حـ] ورأسه ا ينتمي إلى (ق) .

46. [م س ، م ع] زاوية ، حـ نقطة .
أنشيء مثلثا متساوي الساقين م ا ب حيث : م هي رأس المثلث م ا ب وَ ا ∋ [م س)، وَ ب ∋ [م ع) و حـ ∋ [ا ب] .

47. ا ، ب نقطتان ، α عدد حقيقي موجب غير معدوم .
أنشيء مثلثا ا ب حـ قائما في ا علما أن نصف قطر الدائرة المرسومة فيه هو α .

48. ب ، حـ نقطتان ، β عدد حقيقي موجب غير معدوم
أنشيء مثلثا ا ب حـ علما أن نصف قطر الدائرة المحيطة به هو β .

49. ا نقطة ، (ى) دائرة ، α عدد حقيقي موجب غير معدوم .
أنشيء دائرة نصف قطرها α تمس (ى) وتشمل ا .

50. (ق) ، (ق′) مستقيمان متوازيان و (ق″) قاطع لهما .
أنشيء دائرة تمس (ق) وَ (ق′) وَ (ق″) .

51. (ق) ، (ق′) مستقيمان ، α عدد حقيقي موجب غير معدوم .
أنشيء دائرة نصف قطرها α تمس (ق) و (ق′)

52. (ق) مستقيم ، (ى) دائرة ، α عدد حقيقي موجب غير معدوم .
أنشيء دائرة نصف قطرها α تمس (ق) وَ (ى) .

53. (ى) ، (ى′) دائرتان ، α عدد حقيقي موجب غير معدوم .
أنشيء دائرة نصف قطرها α تمس (ى) وَ (ى′) .

54. ب ، حـ نقطتان ، α عدد حقيقي موجب غير معدوم
أنشيء مثلثا ا ب حـ بحيث تكون المسافة بين النقطة ا والمستقيم (ب حـ) تساوي α .

55. (ق) ، (قَ) مستقيمان ؛ α عدد حقيقي موجب غير معدوم .
أنشيء دائرة نصف قطرها α تحدد على (ق) وَ (قَ) قطعتين عُلِم طولاهما .

56. ب ، ح نقطتان ؛ α عدد حقيقي موجب غير معدوم .
أنشيء مثلثا اب ح بحيث تكون المسافة بين ا ومنتصف [ب ح] تساوي α .

57. [أس ، اع] زاوية قائمة . هـ نقطة ؛ α عدد حقيقي موجب .
أنشيء نقطتين ب ، ح بحيث تكون هـ منتصف [ب ح] وَ ب ∈ [أس)
وَ ح ∈ [اع) وَ ب ح = α .

الباب الرابع

العلاقات والتطبيقات والعمليات الداخليّة

لقد قدمت في السنوات السابقة المبادىء الأوّلية في المفاهيم التالية : العلاقات ، علاقة التكافؤ ، علاقة الترتيب ، الدوال ، التطبيقات ، العمليات الداخليّة .

وفي هذه السنة ستراجع هذه المفاهيم بدقة أكثر وتعطى لها صيغ جديدة على ضوء المكتسبات في المنطق وتدعم بتتمات مثل : العلاقة العكسية لعلاقة ، التباين ، الغمر ، ....

إن المواضيع المدروسة في هذا الباب تعتبر مناسبة ممتازة لتدريب التلاميذ على استعمال أدوات المنطق استعمالاً سليماً ووسيلة لاكسابهم القدرة على التحكم أكثر في التقنيات الحسابية .

12 العلاقات

1. العلاقة من مجموعة نحو مجموعة :

1.1 ـ الجداء الديكارتي :

الجداء الديكارتي للمجموعتين ك ، ل بهذا الترتيب ، هو مجموعة الثنائيات (س ، ع) حيث س ينتمي إلى ك و ع ينتمي إلى ل

ك × ل = { (س ، ع) ؛ س ∈ ك ؛ ع ∈ ل }

2.1 ـ العلاقة من مجموعة نحو مجموعة :

- تكون العلاقة ع من المجموعة ك نحو المجموعة ل معيّنة إذا أعطيت المجموعتان ك ؛ ل وعرفت على ك×ل الجملة المفتوحة ع (س ، ع) .
- تسمى المجموعة بـ$_{ع}$ = {(س ، ع) ∈ ك×ل ؛ ع (س ، ع)} بيان العلاقة ع .
- إذا كانت ع (س ، ع) صحيحة نقول إن الثنائية (س ، ع) تحقق العلاقة ع . ونقول أيضاً إن العلاقة ع ترفق بالعنصر س العنصر ع .

3.1 ـ العلاقة العكسية :

ع علاقة من مجموعة ك نحو مجموعة ل .

العلاقة العكسية للعلاقة ع هي العلاقة ع$^{-1}$ من ل نحو ك المعرّفة كما يلي :

∀ س ∈ ل ؛ ∀ ع ∈ ك : [ع$^{-1}$ (س ، ع) ⟺ ع (ع ، س)]

مثال :

ك = { -2 ، 0 ، 2 ، 4 ، 5 } ؛ ل = { -1 ، 0 ، 1 ، 3 ، 4 }

ع العلاقة من ك نحو ل المعرّفة كما يلي :

$\forall$ أ ∋ ك ؛ $\forall$ ب ∋ ل : [ع (أ ، ب) ⟸ أ «هو ضعف» ب]

بيان العلاقة ع هو :

ب$_{ع}$ = { (1 ، 2)،(0 ، 0) ، (1 − ، 2 −) }

وعلاقتها العكسية هي العلاقة ع$^{-1}$ من ل نحو ك المعرّفة كما يلي :

$\forall$ أ ∋ ل ؛ $\forall$ ب ∋ ك : [ع$^{-1}$ (أ ، ب) ⟺ ع (ب ، أ)]

إذن :

$\forall$ أ ∋ ل ؛ $\forall$ ب ∋ ك : [ع$^{-1}$ (أ ، ب) ⟺ أ «ضعفه» ب]

بيان العلاقة ع$^{-1}$ هو :

ب$_{ع^{-1}}$ = { (2 ، 1) ، (0 ، 0) ، (2 − ، 1 −) }

2 ـ العلاقة في مجموعة :

1.2 ـ تعريف : إذا كانت ك مجموعة فإن كل علاقة من ك نحو ك تسمى علاقة في ك .

2.2 ـ خواص العلاقة في مجموعة :

ع علاقة في مجموعة ك .

- **العلاقة الانعكاسية :**

تكون العلاقة ع انعكاسية إذا كانت كل ثنائية (س ، س) من ك × ك تحقق العلاقة ع .

ع انعكاسية ⟺ $\forall$ س ∋ ك : ع (س ، س) .

ملاحظة :

تكون العلاقة ع غير انعكاسية إذا كانت القضية :

$\forall$ س $\in$ ك : ع (س ، س) خاطئة

إذن : ع غير انعكاسية $\Leftrightarrow$ E س $\in$ ك : $\overline{\text{ع (س ، س)}}$

- **العلاقة التناظرية :**

تكون العلاقة ع تناظرية إذا تحقق ما يلي :

كلما حققت الثنائية (س ، ع) العلاقة ع فإن الثنائية (ع ، س) تحقق ع .

إذن تكون ع تناظرية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$\forall$ س $\in$ ك ؛ $\forall$ ع $\in$ ك : [ع (س ، ع) $\Leftarrow$ ع (ع ، س)]

ملاحظة :

ع غير تناظرية $\Leftrightarrow$ E س $\in$ ك ؛ E ع $\in$ ك : ع (س ، ع) صحيحة وَ ع (ع ، س) خاطئة

العلاقة ضد التناظرية :

تكون العلاقة ع ضد تناظرية إذا تحقق ما يلي :

كلما اختلف عنصران س و ع فإنه لا يمكن أن تحقق الثنائيتان (س ، ع) و (ع ، س) العلاقة ع معاً أي :

[س $\neq$ ع $\Leftarrow$ $\overline{\text{ع (س ، ع) } \wedge \text{ ع (ع ، س)}}$] (1)

نعلم أن :

(1) $\Leftrightarrow$ [ع (س ، ع) $\wedge$ ع (ع ، س) $\Leftarrow$ (س = ع)]

إذن تكون ع ضد تناظرية اذا وفقط اذا تحقق ما يلي :

∀ س ∈ ك ، ∀ ع ∈ ك : ع (س ، ع) ∧ ع (ع ، س) ⇐ (س = ع)

العلاقة المتعدية :

تكون العلاقة ع متعدية إذا وفقط اذا تحقق ما يلي :

كلما حققت الثنائيتان (س ، ع) و (ع ، ص) العلاقة ع فإن الثنائية (س ، ص) تحقق العلاقة ع :

إذن تكون ع متعدية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

∀ س ∈ ك ، ∀ ع ∈ ك ، ∀ ص ∈ ك : ع (س ، ع) ∧ ع (ع ، ص) ⇐ ع (س ، ص)

ملاحظة :

تكون ع غير متعدية إذا وجدت ثلاثة عناصر س ، ع ، ص من ك بحيث تكون :

ع (س ، ع) ∧ ع (ع ، ص) صحيحة وَ ع (س ، ص) خاطئة .

3.2 ـ علاقة التكافؤ في مجموعة :

ع علاقة في مجموعة غير خالية ك

- **تعريف** : تكون العلاقة ع علاقة تكافؤ في ك إذا كانت انعكاسية ، تناظرية ومتعدية .
- إذا حققت الثنائية (أ ، ب) علاقة التكافؤ ع نقول إن أ و ب متكافئان .

- **أصناف التكافؤ :**

ع علاقة تكافؤ في مجموعة ك ، أ عنصر ينتمي إلى ك .

صنف تكافؤ العنصر أ هو مجموعة العناصر المكافئة للعنصر أ وفق ع

نرمز إلى صنف تكافؤ أ بالرمز : صنف (أ) أو أ̇

أ̇ = { س ∈ ك ، ع (أ ، س) }

ملاحظات :

من خواص علاقة التكافؤ ع نستنتج أن :

- ع (ا ، ب) $\Leftrightarrow$ أ = ب
- أ $\neq$ ب $\Leftrightarrow$ أ $\cap$ ب = ϕ

• مجموعة حاصل القسمة :

ع علاقة تكافؤ في مجموعة ك .

مجموعة حاصل قسمة ك وفق ع هي مجموعة أصناف التكافؤ وفق ع . نرمز إلى هذه المجموعة بالرمز ك/ع .

تمرين محلول :

ع علاقة في مجموعة الأعداد الصحيحة ص معرّفة كما يلي :

[ع (س ، ع) $\Leftrightarrow$ E م ∋ ص : س − ع = 3 م]

1) لنبرهن أن ع علاقة تكافؤ .

2) لنعيّن أصناف تكافؤ الأعداد 0 ، 1 ، 2 .

• العلاقة ع انعكاسية : مهما كان العدد الصحيح س يمكننا أن نكتب

س − س = 3 × 0

إذن يوجد عدد صحيح م (م = 0) حيث س − س = 3 × م

وهذا يعني أن العلاقة ع انعكاسية .

• العلاقة ع تناظرية .

لتكن (س ، ع) ثنائية تحقق العلاقة ع :

ع (س ، ع) $\Leftrightarrow$ E م ∋ ص : س − ع = 3 م

ع (س ، ع) $\Leftrightarrow$ E م ∋ ص : ع − س = 3 (− م)

بوضع − م = م′ يمكن كتابة القضية الأخيرة على الشكل :

E م′ ∋ ص : ع − س = 3 م′

وهذا يعني أن الثنائية (ع ، س) تحقق العلاقة ع

إذن العلاقة ع تناظرية .

• العلاقة ع متعدية

لتكن (س ، ع) ، (ع ، هـ) ثنائيتين تحققان العلاقة ع :

ع (س ، ع) ⟸ E ن ∋ ص : س − ع = 3 ن (1)

ع (ع ، هـ) ⟸ E ن′ ∋ ص : ع − هـ = 3 ن′ (2)

من (1) و (2) وبجمع المساواتين طرفاً لطرف نستنتج أنه :

يوجد عدد صحيح ن″ (ن″ = ن + ن′) حيث س − هـ = 3 ن″

وهذا يعني أن الثنائية (س ، هـ) تحقق العلاقة ع

إذن العلاقة ع متعدية

خلاصة ما سبق :

العلاقة ع انعكاسية ؛ تناظرية ومتعدية فهي علاقة تكافؤ .

2) تعيين أصناف تكافؤ الأعداد 0 ؛ 1 ؛ 2 .

• $\dot{0}$ = { س ∋ ص ؛ ع (س ، 0) }

$\dot{0}$ = { س ∋ ص ؛ E ن ∋ ص ؛ س − 0 = 3 ن }

$\dot{0}$ = { س ∋ ص ؛ E ن ∋ ص : س = 3 ن }

إذن صنف تكافؤ العدد 0 هو مجموعة مضاعفات 3 .

$\dot{1}$ = { س ∋ ص ؛ ع (س ، 1) }

$\dot{1}$ = { س ∋ ص ؛ E ن ∋ ص : س − 1 = 3 ن }

$\dot{1}$ = { س ∋ ص ؛ E ن ∋ ص : س = 1 + 3 ن }

لدينا مثلاً : 10 ∋ $\dot{1}$ ؛ (−5) ∋ $\dot{1}$ ؛ 1 ∋ $\dot{1}$ ؛ ....

$\dot{2}$ = { س ∋ ص ؛ ع (س ، 2) }

$\dot{2}$ = { س ∋ ص ؛ E ن ∋ ص : س − 2 = 3 ن }

$\dot{2}$ = { س ∋ ص ؛ E ن ∋ ص : س = 2 + 3 ن }

لدينا مثلاً : 2 ∋ $\dot{2}$ ؛ 5 ∋ $\dot{2}$ ؛ (−1) ∋ $\dot{2}$ ؛ (−7) ∋ $\dot{2}$ ؛ ...

ملاحظة :

كل عدد صحيح يكتب على شكل واحد من الأشكال التالية :

3 ه ؛ 1 + 3 ه ؛ 2 + 3 ه   (ه ∋ ص)

إذن

كل عدد صحيح ينتمي إما إلى $\dot{0}$ وإما إلى $\dot{1}$ وإما إلى $\dot{2}$

ومنه نستنتج مجموعة حاصل قسمة ص وفق ع

$$ص / ع = \{ \dot{0} ، \dot{1} ، \dot{2} \}$$

4.2 ـ علاقة الترتيب :

ع علاقة في مجموعة غير خالية ك .

تكون العلاقة ع علاقة ترتيب إذا كانت انعكاسية ؛ ضد تناظرية ومتعدّية

- **الترتيب الكلّي ـ الترتيب الجزئي :**

ع علاقة ترتيب في مجموعة ك .

تكون العلاقة ع علاقة **ترتيب كلّي** إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

∀ س ∋ ك ؛ ∀ ع ∋ ك : ع (س ، ع) أو ع (ع ، س) .

تكون العلاقة ع علاقة **ترتيب جزئي** إذا كانت ع علاقة ترتيب غير كلّي .

تمرين محلول :

> ع علاقة في المجموعة ط* معرفة كما يلي :
>
> ع (س ، ع) ⟺ العدد س « مضاعف » للعدد ع
>
> 1) لنبرهن أن ع علاقة ترتيب
>
> 2) هل هذا الترتيب كلّي ؟

- العلاقة انعكاسية

مهما كان العدد أ من ط* نعلم أن أ مضاعف لنفسه

إذن العلاقة ع انعكاسية .

• العلاقة ع ضد تناظرية

أ ، ب عددان من ط* بحيث يكون : أ مضاعفاً للعدد ب
و ب مضاعفاً للعدد أ .

نعلم أنه :

إذا كان أ مضاعفاً للعدد ب فإن أ ⩾ ب (1)

وإذا كان ب مضاعفاً للعدد أ فإن ب ⩾ أ (2)

من المتباينتين (1) و (2) نستنتج أن أ = ب

إذن العلاقة ع ضد تناظرية .

• العلاقة ع متعدية

س ، ع ، ص أعداد طبيعية غير معدومة

نعلم أنه :

إذا كان العدد س مضاعفاً للعدد ع وكان ع مضاعفا للعدد ص
فإن العدد س يكون مضاعفاً للعدد ص

وهذا يعني أن العلاقة ع متعدّية .

• العلاقة ع علاقة ترتيب جزئي

لأنه يوجد عددان طبيعيان غير معدومين س ، ع
(س = 2 ؛ ع = 5) بحيث العدد س ليس مضاعفاً للعدد ع
والعدد ع ليس مضاعفاً للعدد س .

13 الدوال ـ التطبيقات

1 ـ الدوال :

1.1 ـ تعريف :

نسمي دالة للمجموعة ك في المجموعة ل كلّ علاقة من ك نحو ل ترفق بكل عنصر من ك عنصراً على الأكثر من ل

نرمز إلى دالة بأي حرف مثل : تا ؛ ها ؛ عا ؛ ....
إذا كانت تا دالة للمجموعة ك في المجموعة ل نكتب :

تا : ك ⟵ ل أو ك $\xrightarrow{\text{تا}}$ ل

س ↦ تا (س) س ↦ تا (س)

العنصر تا (س) هو صورة العنصر س بالدالة تا

العنصر س هو سابقة للعنصر تا (س) بالدالة تا

2.1 ـ أمثلة :

1) ك = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 }

بع بيان علاقة ع حيث بع ={(1 ، 5) ؛ (2 ، 6) ؛ (6 ، 4) ؛ (4 ، 2) ؛ (3 ، 6)}

العلاقة ع هي دالة للمجموعة ك في نفسها لأن كل عنصر من ك له صورة على الأكثر في ك .

2) بع-1 بيان العلاقة العكسية ع-1 للعلاقة ع المعرفة سابقاً

بع-1 = {(5 ، 1) ؛ (6 ، 2) ؛ (4 ، 6) ؛ (2 ، 4) ؛ (6 ، 3)}

العلاقة ع^{-1} ليست دالة للمجموعة ك في نفسها لأن العنصر 6 له صورتان مختلفتان 2 و 3 .

3) ع علاقة من المجال $]0 ، 1[$ نحو المجموعة ح معرفة كما يلي :

$$\text{ع}\ (\text{س} ، \text{ع}) \Leftrightarrow \text{س} + \text{ع}^2 = 1$$

العلاقة ع ليست دالة لأن كل عنصر س من المجال $]0 ، 1[$ له صورتان مختلفتان ع_1 ، ع_2 . ($\text{ع}_1 = \sqrt{1 - \text{س}}$ وَ $\text{ع}_2 = -\sqrt{1 - \text{س}}$) .

3.1 ـ مجموعة تعريف دالة :

تا دالة للمجموعة ك في المجموعة ل

مجموعة تعريف الدالة تا هي مجموعة عناصر المجموعة ك التي لها صورة في ل بالدالة تا .

نرمز عادة إلى مجموعة تعريف الدالة تا بالرمز $\text{ف}_{\text{تا}}$

مثال : نعتبر الدالتين تا و ها المعرفتين كما يلي :

$$\text{تا} : \text{ح} \longrightarrow \text{ح} \qquad\qquad \text{ها} : \text{ح} \longrightarrow \text{ح}$$

$$\text{س} \longmapsto \frac{1}{\text{س}^2 - 1} \qquad\qquad \text{س} \longmapsto \sqrt{1 - \text{س}}$$

تكون الدالة تا غير معرفة إذا كان $\text{س}^2 - 1 = 0$ أي ($\text{س} = 1$ أو $\text{س} = -1$)

إذن تكون الدالة تا معرفة إذا كان ($\text{س} \neq 1$ وَ $\text{س} \neq -1$)

ومنه : $\text{ف}_{\text{تا}} = \text{ح} - \{-1 ، +1\}$

يمكن كتابة $\text{ف}_{\text{تا}}$ على الشكل

$$\text{ف}_{\text{تا}} =]-\infty ، -1[\cup]-1 ، 1[\cup]1 ، +\infty[$$

تكون الدالة ها معرفة إذا كان $1 - \text{س} \geqslant 0$ أي ($\text{س} \leqslant 1$)

إذن $\text{ف}_{\text{ها}} =]-\infty ، 1]$

4.1 ـ تساوي دالتين :

تتساوى دالتان تا وَ ها إذا تحقق ما يلي :
- للدالتين تا وَ ها نفس مجموعة البدء ك ونفس مجموعة الوصول ل
- ∀ س ∋ ك : تا (س) = ها (س)

أمثلة :

1) تا :] 0 ، 3 [← ح   ها :] 0 ، 3 [← ح

س ← $\frac{س^2 + 2 س}{س}$ س ← س + 2

الدالتان تا وَ ها متساويتان لأن لها نفس مجموعة البدء ونفس مجموعة الوصول

∀ س ∋] 0 ، 3 [: $\frac{س^2 + 2 س}{س}$ = س + 2

2) تا : ح ← ح   ها : ح ← ح

س ← $\frac{س^2 + 2 س}{س}$ س ← س + 2

الدالتان تا وَ ها غير متساويتين لأن القضية

∀ س ∋ ح تا (س) = ها (س) غير صحيحة

3) تا :] − 1 ، 1 [←] 0 ، 1 [ها :] − 1 ، 1 [←] 0 ، 1]

س ↦ $س^2$ س ↦ $س^2$

الدالتان تا وَ ها غير متساويتان لأن مجموعتي الوصول مختلفتان

5.1 ـ تركيب دالتين :

تا : ك ← ل   ها : ل ← ن

س ← تا (س)   س ← ها (س)

الدالة المركبة من الدالتين تا وَ ها بهذا الترتيب هي الدالة عا للمجموعة ك في المجموعة ن المعرفة كما يلي :

عا (س) = ها [تا (س)]

نرمز إلى الدالة عا بالرمز ها ∘ تا

لدينا : (ها ∘ تا) (س) = ها [تا (س)]

ل
تا
ها
ك
ق
ها ∘ تا

المثال 1 : تا ، ها دالتان معرفتان كما يلي :

تا : ح ← ح   ها : ح ← ح

س ↦ س − 2   س ↦ $س^2$

• الدالة المركبة ها ∘ تا هي الدالة للمجموعة ح في نفسها المعرفة كما يلي :

(ها ∘ تا) (س) = ها [تا (س)]

= ها (س − 2)

= $(س - 2)^2$

• الدالة المركبة تا ∘ ها هي الدالة للمجموعة ح في نفسها المعرفة كما يلي :

(تا ∘ ها) (س) = تا [ها (س)]

= تا ($س^2$)

= $س^2 - 2$

• نلاحظ أن : ها ∘ تا ≠ تا ∘ ها

المثال 2 : تا ، ها دالتان معرفتان كما يلي :

تا : $ح_-$ ←] − 1 ، 1 + [ها :] − 1 ، 1 + [← $ح_+$

س ↦ س + 1   س ↦ $\frac{1}{س + 3}$

• الدالة المركبة ها ∘ تا هي الدالة للمجموعة $ح_-$ في المجموعة $ح_+$ المعرفة كما يلي :

(ها ∘ تا) (س) = ها [تا (س)]

= ها (س + 1)

= $\frac{1}{(س + 1) + 3}$

$\frac{1}{س + 4}$

• لا يمكن تركيب الدالتين ها وَ تا بهذا الترتيب لأن مجموعة بدء الدالة تا تختلف عن مجموعة وصول الدالة ها .

2 ـ التطبيقات :

1.2 ـ تعريف :

> نسمي تطبيقا للمجموعة ك في المجموعة ل كلّ علاقة من ك نحو ل ترفق بكلّ عنصر من ك عنصراً واحداً من ل .

نستنتج من هذا التعريف أنه :
إذا كانت مجموعة تعريف دالة تساوي مجموعة بدئها فإن هذه الدالة تطبيق

نلاحظ أن اقتصار دالة على مجموعة تعريفها تطبيق

أمثلة :

1) نعتبر العلاقة ع من ط نحو ص المعرفة كما يلي :
ع (س ، ع) ⟸ ع = س − 1
العلاقة ع تطبيق للمجموعة ط في المجموعة ص

2) نعتبر العلاقة ع′ من ص نحو ط المعرفة كما يلي :
ع′ (س ، ع) ⟸ ع = س − 1
العلاقة ع′ ليست تطبيقاً ؛ لكنها دالة

3) ها وَ تا دالتان معرفتان كما يلي :

ها : ح ← ح   تا : [−1 ، +∞ [← ح
س ↤ $\sqrt{س + 1}$ س ↤ $\sqrt{س + 1}$

الدالة ها ليست تطبيقاً .
أما الدالة تا التي هي اقتصار الدالة ها على مجموعة تعريفها فهي تطبيق

2.2 ـ التطبيق المطابق :

التطبيق المطابق في المجموعة ك هو التطبيق للمجموعة ك في نفسها الذي يرفق بكل عنصر س من ك العنصر س نفسه

نرمز إلى التطبيق المطابق في المجموعة ك ، بالرمز $1_{ك}$

إذن : $\forall$ س $\in$ ك : $1_{ك}$ (س) = س

إذا كان تا تطبيقاً للمجموعة ك في المجموعة ل فإن :

- $\forall$ س $\in$ ك : (تا $\circ$ $1_{ك}$) (س) = تا [$1_{ك}$ (س)] = تا (س)

إذن تا $\circ$ $1_{ك}$ = تا

- $\forall$ س $\in$ ك ($1_{ل}$ $\circ$ تا) (س) = $1_{ل}$ [تا (س)] = تا (س)

إذن $1_{ل}$ $\circ$ تا = تا .

3 ـ أنواع التطبيقات :

تا تطبيق لمجموعة ك في مجموعة ل .

نعلم أن لكلّ عنصر س من مجموعة البدء ك صورة وحيدة في ل بالتطبيق تا لنهتم الآن بعناصر مجموعة الوصول

- يمكن أن تكون لكلّ عنصر من ل سابقة وحيدة في ك ونعلم أن التطبيق تا يُسمى عندئذ تَقَابُلاً
- يمكن أن تكون لكلّ عنصر من ل سابقة على الأقل في ك وَيسمى التطبيق تا عندئذ غَمْراً
- يمكن أن تكون لكلّ عنصر من ل سابقة على الأكثر في ك وَيُسمى التطبيق تا عندئذ تَبَايُناً

1.3 ـ التطبيق الغامر

تعريف :

يكون التطبيق تا للمجموعة ك في المجموعة ل **غامراً** إذا وَفقط إذا كانت لكلّ عنصر من ل سابقة على الأقل في ك بالتطبيق تا

أي بصيغة أخرى .

(تا غمر) ⟸ ∀ع ∋ ل ؛ E س ∋ ك : ع = تا (س)

ملاحظة : يكون التطبيق تا غير غامر إذا وجد عنصر من ل ليست له سابقة في ك

المثال 1 : ليكن التطبيق تا لمجموعة الأعداد الحقيقية في نفسها المعرف كما يلي : تا (س) = 1 − 2 س

ليكن ع عنصراً ما من ح . هل يوجد عنصر س من ح حيث ع = تا (س) ؟

لدينا : ع = تا (س) ⟸ ع = 1 − 2 س

$$\Leftrightarrow \text{س} = \frac{1 - \text{ع}}{2}$$

اذن لكلّ عنصر ع من ح سابقة على الأقل س في ح

وَ بالتالي : التطبيق تا غامر

المثال 2 : ليكن التطبيق عا المعرف كما يلي : عا : $ح_+$ ← ح

س ↦ $\sqrt{\text{س}}$

ليكن ع عنصراً ما من ح ، هل يوجد عنصر س في $ح_+$

حيث ع = $\sqrt{\text{س}}$ ؟

نعلم أن ($\sqrt{\text{س}}$) هو عدد حقيقي موجب .

إذن الأعداد الحقيقية السالبة غير المعدومة ليست لها سوابق بالتطبيق عا : مثلا ، العدد (− 1) ليست له سابقة بالتطبيق عا

إذن التطبيق عا ليس غامراً .

2.3 ـ التطبيق المتباين :

تعريف :

> يكون التطبيق تا للمجموعة ك في المجموعة ل متباينا إذا وَفقط إذا كانت لكلّ عنصر من ل سابقة على الأكثر في ك بالتطبيق تا

يمكن أن نعطي لهذا التعريف الصيغة التالية :

يكون التطبيق تا متباينا إذا وفقط اذا تحقق ما يلي :

$$\left(\forall \text{س} \in \text{ك} ، \forall \text{س}' \in \text{ك} : \text{س} \neq \text{س}' \Rightarrow \text{تا}(\text{س}) \neq \text{تا}(\text{س}') \right)$$

بتعويض الإستلزام $\left(\text{س} \neq \text{س}' \Rightarrow \text{تا}(\text{س}) \neq \text{تا}(\text{س}') \right)$ بعكسه النقيض $\left(\text{تا}(\text{س}) = \text{تا}(\text{س}') \Rightarrow \text{س} = \text{س}' \right)$ يمكن كتابة هذا التعريف على الصيغة التالية :

$$\left(\text{تا متباين} \right) \Leftrightarrow \left(\forall \text{س} \in \text{ك} \forall \text{س}' \in \text{ك} : \text{تا}(\text{س}) = \text{تا}(\text{س}') \Rightarrow \text{س} = \text{س}' \right)$$

ملاحظة : يكون التطبيق تا غير متباين إذا وجد عنصران مختلفان من ك لهما نفس الصورة في ل

المثال 1 : تا : ح ← ح

$\text{س} \mapsto 1 - 2\text{س}$

ليكن س وَ سَ' عددين حقيقيين .

$\text{تا}(\text{س}) = \text{تا}(\text{س}') \Rightarrow 1 - 2\text{س} = 1 - 2\text{س}'$

$\Rightarrow -2\text{س} = -2\text{س}'$

$\Rightarrow \text{س} = \text{س}'$

إذن $\forall$ س $\in$ ح ؛ $\forall$ سَ $\in$ ح : تا (س) = تا (سَ) $\Leftarrow$ س = سَ
وَ التطبيق تا متباين

المثال 2 : ها : ح $\leftarrow$ ح
س $\mapsto$ س²

ليكن س وَ س′ عددين حقيقيين
ها (س) = ها (س′) $\Leftarrow$ س² = س′²
$\Leftarrow$ | س | = | س′ |
$\Leftarrow$ (س = س′) أو (س = − س′)

العنصران (س) وَ (− س) لهما نفس الصورة (مثلا العددان الحقيقيان (+ 2) وَ (− 2) لهما نفس الصورة 4) . إذن التطبيق ها غير متباين .

3.3 ـ التطبيق التقابلي :

تعريف :

يكون التطبيق تا للمجموعة ك في المجموعة ل تقابليا إذا وفقط إذا : كانت لكل عنصر من ل سابقة وحيدة في ك بالتطبيق تا .

يمكن أن تعطى لهذا التعريف الصيغة التالية :
(تا تقابلي) $\Longleftrightarrow$ (تا غامر ومتباين)

ملاحظة 1 : يكون التطبيق تا غير تقابلي إذا كان تا غير غامر أو تا غير متباين

مثال :

تا : ح $\leftarrow$ ح ، س $\mapsto$ 1 − 2 س

عا : ح $\leftarrow$ ح ، س $\mapsto$ $\sqrt{\text{س}}$

ها : ح $\leftarrow$ ح ، س $\mapsto$ س²

رأينا سابقا أن التطبيق تا غامر وَمتباين وأن التطبيق عا غير غامر وأن التطبيق ها غير متباين .
إذن التطبيق تا تقابلي . أمّا التطبيقان عا وَ ها فهما غير تقابلين

ملاحظة 2 :

تا تطبيق تقابلي لمجموعة ك في مجموعة ل بما أن كل عنصر من ل له سابقة وحيدة في ك بالتطبيق تا فإن العلاقة العكسية للعلاقة تا ترفق بكل عنصر من ل عنصرا وحيدا في ك :
فهي إذن تطبيق

نسمي هذا التطبيق بالتطبيق العكسي للتقابل تا ونرمز إليه بالرمز تا $^{-1}$

ملاحظة 3 :

لمعرفة إن كان التطبيق تا للمجموعة ك في المجموعة ل تطبيقا غامرا أو متباينا أو تقابليا نبحث عن عدد حلول المعادلة ذات المجهول س

ع = تا (س)

- إذا كان لهذه المعادلة حل على الأقل في ك من أجل كل عنصر ع من ل . فإن التطبيق تا غامر
- إذا كان لهذه المعادلة حل على الأكثر في ك من أجل كل عنصر ع من ل . فإن التطبيق تا متباين
- إذا كان لهذه المعادلة حل وحيد في ك . من أجل كل عنصر ع من ل . فإن التطبيق تا تقابلي

14 العمليات الداخلية

1 ـ العمليات الداخلية في مجموعة :

تعريف :

نسمي عملية داخلية في مجموعة ك كل تطبيق للمجموعة ك × ك في المجموعة ك

نرمز إلى عملية ما بأحد الرموز مثل : + ، × ، ★ ، ◘ ، △ ، ○ ...

وَنكتب مثلا : ★ : ك × ك ← ك

(س ، ع) ↤ (س ★ ع)

أمثلة :

1. الجمع والضرب والطرح ثلاث عمليات داخلية في مجموعة الأعداد الحقيقية ح .

القسمة عملية داخلية في مجموعة الأعداد الحقيقية غير المعدومة ح*

2. التطبيق المعرف كما يلي : ★ : ح × ح ← ح

$$(س ، ع) \mapsto \frac{س + ع}{2}$$

هو عملية داخلية في ح

لدينا مثلا : $1 ★ 3 = \frac{1 + 3}{2} = 2$

$$2 ★ 5 = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$5 ★ 2 = \frac{5 + 2}{2} = \frac{7}{2}$$

3. التطبيق المعرف كما يلي : Δ : ط^2 × ط^2 ← ط^2

$$\Big(\text{(س ، ع) ، (س' ، ع')}\Big) \mapsto \text{(س + س' ، ع . ع')}$$

هو عملية داخلية في ط^2 (نذكر أن ط هي مجموعة الأعداد الطبيعية)

لدينا : $(2 ، 3) \Delta (1 ، 4) = (2+1 ، 3\times4) = (3 ، 12)$

$(0 ، 1) \Delta (1 ، 0) = (0+1 ، 1\times0) = (1 ، 0)$

4. π مجموعة نقط المستوي . التطبيق Δ للمجموعة $\pi \times \pi$ في المجموعة π الذي يرفق بكل ثنائية نقطية (أ ، ب) منتصف القطعة [أ ب] هو عملية داخلية في π

إذا اعتبرنا مثلا الشكل المجاور

لدينا : أ Δ ب = هـ

هـ Δ حـ = ي

أ Δ أ = أ

أ
هـ
ي
ب
حـ

5. ت مجموعة التطبيقات للمجموعة ح في نفسها

التطبيق $\circ$ للمجموعة ت × ت في المجموعة ت الذي يرفق بكل ثنائية (تا ، ها) مركب التطبيقين تا وَ ها هو عملية داخلية في ت

نذكر أن مركب التطبيقين تا وَ ها بهذا الترتيب هو التطبيق ها $\circ$ تا المعرف كما يلي : (ها $\circ$ تا) (س) = ها [تا (س)]

مثلا إذا كان تا وَ ها معرفين كما يلي :

تا (س) = 2 س + 3 ، ها (س) = س^2 + 1

فإن : (ها $\circ$ تا) (س) = ها [2 س + 3] = (2 س + 3)^2 + 1

= 4 س^2 + 12 س + 10

2 ـ خاصة التبديل :

★ عملية داخلية في مجموعة ك

تكون العملية ★ تبديلية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :
∀ س ∋ ك ، ∀ ع ∋ ك : س ★ ع = ع ★ س

ملاحظة :

تكون العملية ★ غير تبديلية إذا وُجد عنصران س ، ع من ك حيث

س ★ ع ≠ ع ★ س

أمثلة :

1. الجمع والضرب في ح عمليتان تبديليتان
الطرح في ح عملية غير تبديلية

2. العملية ∆ في π التي ترفق بكل ثنائية نقطية (ا ، ب) منتصف القطعة [ا ب] تبديلية لأن للقطعتين [ا ب] وَ [ب ا] نفس المنتصف

3. العملية ∘ المعرفة سابقا في مجموعة التطبيقات للمجموعة ح في نفسها غير تبديلية

مثلا : إذا كان تا وَ ها معرفين كما يلي :

تا (س) = 2 س + 3 وَ ها (س) = س^2 + 1

فإن : (ها ∘ تا) (س) = (2 س + 3)^2 + 1 = 4 س^2 + 12 س + 10

وَ (تا ∘ ها) (س) = 2 (س^2 + 1) + 3 = 2 س^2 + 5

وَ يكون بالتالي : ها ∘ تا ≠ تا ∘ ها

3 ـ خاصة التجميع :

★ عملية داخلية في مجموعة ك

تكون العملية ★ تجميعية إذا وَفقط إذا تحقق ما يلي
∀ س ∋ ك ، ∀ ع ∋ ك ، ∀ ص ∋ ك : (س ★ ع) ★ ص = س ★ (ع ★ ص)

ملاحظة :

تكون العملية ★ غير تجميعية إذا وجدت ثلاثة عناصر

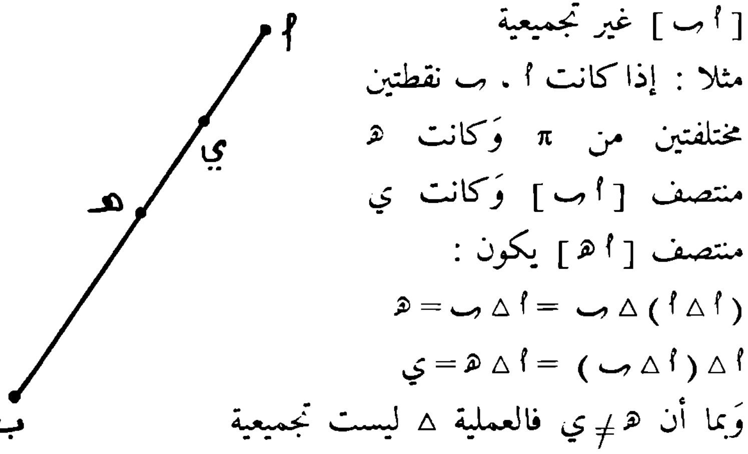
س ، ع ، ص من ك حيث : (س ★ ع) ★ ص ≠ س ★ (ع ★ ص)

أمثلة :

1. الجمع وَالضرب في ح عمليتان تجميعيتان

الطرح في ح عملية غير تجميعية

2. العملية Δ في π التي ترفق بكل ثنائية نقطية (ا ، ب) منتصف القطعة [ا ب] غير تجميعية



مثلا : إذا كانت ا ، ب نقطتين مختلفتين من π وَكانت هـ منتصف [ا ب] وَكانت ي منتصف [ا هـ] يكون :

(ا Δ ا) Δ ب = ا Δ ب = هـ

ا Δ (ا Δ ب) = ا Δ هـ = ي

وَبما أن هـ ≠ ي فالعملية Δ ليست تجميعية

3. العملية ∘ المعرفة سابقا في مجموعة التطبيقات للمجموعة ح في نفسها تجميعية

فعلا : مهما كانت التطبيقات تا ، ها ، عا للمجموعة ح في نفسها لدينا : (تا ∘ ها) ∘ عا = تا ∘ (ها ∘ عا) لأن :

من أجل كل عدد حقيقي س يكون لدينا :

[(تا ∘ ها) ∘ عا] (س) = (تا ∘ ها) [عا (س)]

= تا [ها (عا (س))]

[تا ∘ (ها ∘ عا)] (س) = تا [(ها ∘ عا) (س)]

= تا [ها (عا (س))]

4 ـ توزيع عملية على عملية أخرى :

★ وَ Δ عمليتان داخليتان في مجموعة ك

تكون العملية ★ توزيعية على العملية Δ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي : مهما كانت العناصر س ، ع ، ص من المجموعة ك يكون : س ★ (ع Δ ص) = (س ★ ع) Δ (س ★ ص) وَ (ع Δ ص) ★ س = (ع ★ س) Δ (ص ★ س)

ملاحظة :

إذا كانت العملية ★ تبديلية لكي تكون توزيعية على Δ يكفي أن تتحقق إحدى المساواتين الواردتين في التعريف

أمثلة :

1. الضرب في ح توزيعي على الجمع في ح
2. الجمع في ح ليس توزيعيا على الضرب في ح
3. ★ وَ Δ عمليتان داخليتان في ح معرفتان كما يلي :

س ★ ع = س + ع − 1 وَ س Δ ع = $\frac{1}{2}$ (س + ع)

لكي نبرهن أن ★ توزيعية على Δ يكفي أن نتحقق أنه

∀ س ∈ ح ، ∀ ع ∈ ح ، ∀ ص ∈ ح :

س ★ (ع Δ ص) = (س ★ ع) Δ (س ★ ص)

لأن العملية ★ تبديلية :

مهما كانت الأعداد الحقيقية س ، ع ، ص لدينا

س ★ (ع Δ ص) = س + (ع Δ ص) − 1

= س + $\frac{1}{2}$ (ع + ص) − 1

$$= \frac{1}{2} [2 س + ع + ص - 2]$$

$$(س ★ ع) \triangle (س ★ ص) = (س + ع - 1) \triangle (س + ص - 1)$$

$$= \frac{1}{2} (س + ع - 1 + س + ص - 1)$$

$$= \frac{1}{2} (2 س + ع + ص - 2)$$

إذن : ∀ س ∋ ح ، ∀ ع ∋ ح ، ∀ س ∋ ح :

س ★ (ع △ ص) = (س ★ ع) △ (س ★ ص)

العملية ★ توزيعية على العملية △

4. ★ وَ △ هما العمليتان الداخليتان المذكورتان في المثال السابق

إذا حسبنا : س △ (ع ★ ص) وَ (س △ ع) ★ (س △ ص)

نحصل على $س \triangle (ع ★ ص) = \frac{1}{2} (س + ع + ص - 1)$

وَ $(س \triangle ع) ★ (س \triangle ص) = \frac{1}{2} (2 س + ع + ص - 2)$

من أجل س = ع = ص = 0 يكون $س \triangle (ع ★ ص) = -\frac{1}{2}$

وَ $(س \triangle ع) ★ (س \triangle ص) = -1$

وَ بالتالي : $س \triangle (ع ★ ص) \neq (س \triangle ع) ★ (س \triangle ص)$

العملية △ ليست توزيعية على العملية ★

5 ـ العنصر الحيادي :

★ عملية داخلية في مجموعة ك

يكون العنصرُ ي من المجموعة ك حيادياً للعملية ★ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي : ∀ س ∋ ك : س ★ ي = س وَ ي ★ س = س

الملاحظة 1 :

إذا كانت العملية ★ تبديلية فإن : ∀ س ∋ ك : س ★ ي = ي ★ س إذن يكون العنصر ي عنصرا حياديا للعملية ★ إذا وفقط إذا تحققت إحدى المساواتين الواردتين في التعريف .

الملاحظة 2 :

لنفرض وجود عنصرين حياديين ي ؛ ي′ للعملية ★

لدينا : ي ★ ي′ = ي′ لأن ي عنصر حيادي

ي ★ ي′ = ي لأن ي′ عنصر حيادي

إذنه : ي = ي′

كل عملية داخلية تقبل عنصرا حياديا على الأكثر

أمثلة :

1. العنصر الحيادي للجمع في ح هو 0

   العنصر الحيادي للضرب في ح هو 1

2. ت مجموعة التطبيقات للمجموعة ح في نفسها

   نعلم أن التطبيق المطابق في المجموعة ح يحقق ما يلي

   ∀ ها ∋ ت : ها ∘ $1_{ح}$ = ها وَ $1_{ح}$ ∘ ها = ها

إذن : $1_{ح}$ هو العنصر الحيادي للعملية ∘ في المجموعة ت

3. ★ عملية داخلية في ح معرفة كما يلي : س ★ ع = س + ع − 1

★ عملية تبديلية

يكون العنصر ي عنصرا حياديا إذا وفقط إذا تحقق ما يلي

∀ س ∈ ح : س ★ ي = س

س ★ ي = س ⟺ س + ي − 1 = س

⟺ ي = 1

إذن 1 هو العنصر الحيادي للعملية ★ في ح

4. ∆ عملية داخلية في ح معرفة كما يلي

أ ∆ ب = (أ − 1) (ب − 1) + 1

∆ عملية تبديلية

يكون العنصر ي حياديا إذا وَ فقط إذا تحقق ما يلي :

∀ أ ∈ ح : أ ∆ ي = أ

أ ∆ ي = أ ⟺ (أ − 1) (ي − 1) + 1 = أ

⟺ (أ − 1) (ي − 1) + 1 − أ = 0

⟺ (أ − 1) [(ي − 1) − 1] = 0

⟺ (أ − 1) (ي − 2) = 0

تتحقق المساواة الأخيرة من أجل كل عدد حقيقي أ إذا وفقط

إذا كان ي − 2 = 0 أي ي = 2

إذن 2 هو العنصر الحيادي للعملية ∆ في ح

6 ـ نظير عنصر :

★ عملية داخلية في مجموعة ك تقبل عنصرا حيادياً ي

يكون العنصر سَ من ك نظيراً للعنصر س من ك بالنسبة إلى العملية ★ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي : س ★ س′ = ي وَ س′ ★ س = ي

ملاحظات :

1. إذا كانت العملية ★ تبديلية فإن :

$\forall$ س $\in$ ك ، $\forall$ س′ $\in$ ك : س ★ س′ = س′ ★ س

إذن يكون العنصر س′ نظيرا للعنصر س إذا وفقط إذا تحققت إحدى المساواتين الواردتين في التعريف

2. إذا كان العنصر س′ نظيرا للعنصر س فيكون كذلك العنصر س نظيرا للعنصر س′ . نقول إن العنصرين س وَ س′ متناظران بالنسبة إلى العملية ★

3. إذا كانت العملية ★ تجميعية وكان س′ و س″ نظيري س بالنسبة إلى ★

فإن : (س′ ★ س) ★ س″ = ي ★ س″ = س″

س′ ★ (س ★ س″) = س′ ★ ي = س′

إذن : س′ = س″

إذا كانت العملية ★ تجميعية فإن كل عنصر من ك يقبل نظيراً واحداً على الأكثر في ك

أمثلة :

1. كل عنصر س من ح يقبل نظيرا بالنسبة إلى الجمع هو ($-$ س)

كل عنصر س من ح* يقبل نظيرا بالنسبة إلى الضرب هو ($\frac{1}{س}$

2. رأينا سابقا أنه :

إذا كان تا تطبيقا تقابليا للمجموعة ح في نفسها فإنه يقبل تطبيقا عكسيا تا$^{-1}$ حيث تا ∘ تا$^{-1}$ = 1ح وَ تا$^{-1}$ ∘ تا = 1ح

إذن كل تقابل تا للمجموعة ح في نفسها يقبل نظيرا بالنسبة إلى عملية تركيب التطبيقات هو تطبيقهُ العكسي تا$^{-1}$

مثال 3 :

درسنا فيما سبق العملية الداخلية Δ المعرفة كما يلي :

$$أ \Delta ب = (أ - 1)(ب - 1) + 1$$

ورأينا أن Δ تبديلية وأن 2 عنصر حيادي لهذه العملية

أ عدد حقيقي يكون العدد الحقيقي $أ'$ نظيرا للعدد أ بالنسبة إلى العملية Δ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$أ \Delta أ' = 2$$

$$أ \Delta أ' = 2 \Leftrightarrow (أ - 1)(أ' - 1) + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow (أ - 1)(أ' - 1) = 1$$

- إذا كان أ − 1 = 0 أي أ = 1 تكون المساواة الأخيرة غير صحيحة .
- إذا كان أ $\neq$ 1 فإن

$$(أ - 1)(أ' - 1) = 1 \Leftrightarrow أ' - 1 = \frac{1}{أ - 1}$$

$$\Leftrightarrow أ' = 1 + \frac{1}{أ - 1}$$

إذن العدد 1 لا يقبل نظيرا بالنسبة إلى Δ ونظير كل عدد أ يختلف عن 1 بالنسبة إلى Δ هو

$$1 + \frac{1}{أ - 1}$$

7 . مفهوم الزمرة

تكون المجموعة ك المزودة بالعملية الداخلية ☆ زمرة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية

1 . العملية ☆ تجميعية

2 . يوجد في ك عنصر حيادي للعملية ☆

3 . كل عنصر من ك يقبل نظيرا في ك بالنسبة إلى ☆

إذا كانت المجموعة ك المزودة بالعملية الداخلية ☆ زمرة ، نقول أيضا أن :

(ك ، ☆) زمرة

إذا كانت العملية الداخلية ☆ تبديلية نقول أن الزمرة (ك ، ☆) تبديلية

مثلا :

- (ص ، +) زمرة تبديلية
- (ط ، +) ليست زمرة
- (ح* ، ×) زمرة تبديلية

8 ـ مفهوم الحلقة :

> تكون المجموعة ل المزودة بالعمليتين الداخليتين ★ وَ ▵ بهذا الترتيب حلقة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية
>
> 1. (ل ، ★) زمرة تبديلية
> 2. العملية ▵ تجميعية
> 3. العملية ▵ توزيعية على العملية ★

إذا كانت المجموعة ل المزودة بالعمليتين الداخليتين ★ وَ ▵ حلقة نقول أيضا إن (ل ، ★ ، ▵) حلقة

إذا كانت العملية ▵ تبديلية نقول إن الحلقة (ل ، ★ ، ▵) تبديلية

إذا وجد في ل عنصر حيادي للعملية ▵ نقول إن الحلقة (ل ، ★ ، ▵) واحدية

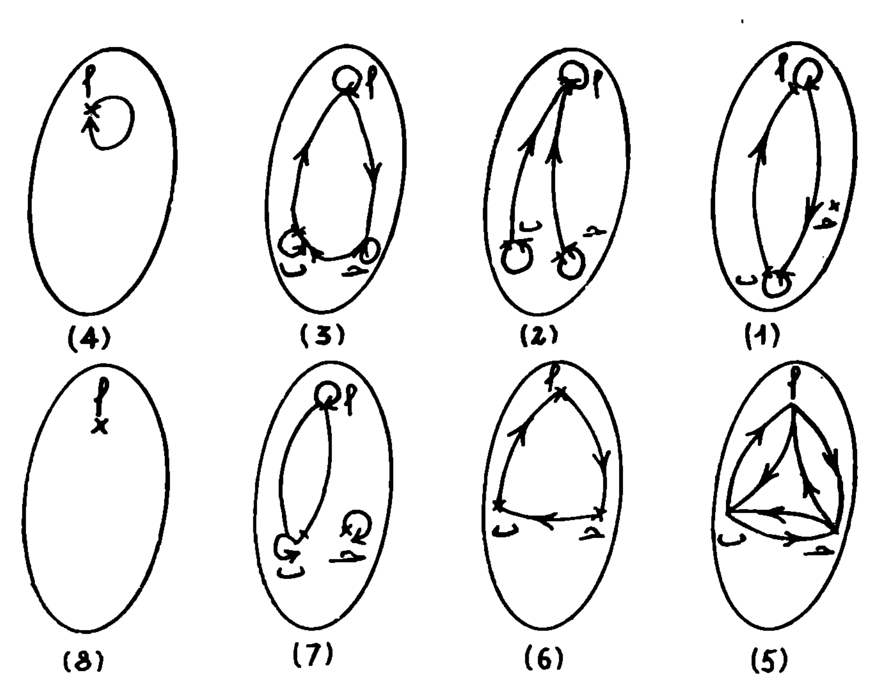
مثلا :

- (ص ، + ، ×) حلقة تبديلية واحدية
- (ص ، × ، +) ليست حلقة

تمارين

العلاقات :

1. أُدرس خواص العلاقات المعرفة بمخططاتها السهمية التالية :



2. ك = { أ ، ب ، ح }.

أُدرس خواص العلاقات ع$_1$ ، ع$_2$ ، ع$_3$ ، ع$_4$ ، ع$_5$ ، المعرفة في ك ببياناتها ب$_1$ ، ب$_2$ ، ب$_3$ ، ب$_4$ ، ب$_5$ ، على الترتيب :

ب$_1$ = {(أ ، أ) ؛ (أ ، ب) ؛ (ب ، ب) ؛ (أ ، ح) ؛ (ح ، ح)}

ب$_2$ = {(ب ، ح) ؛ (ح ، ب) ؛ (أ ، أ)}

ب$_3$ = {(ب ، ح) ؛ (أ ، ب) ؛ (ح ، أ) ؛ (ب ، ب) ؛ (ب ، أ) ؛ (أ ، ح) ؛ (أ ، أ) ؛ (ح ، ح)}

ب$_4$ = {(ح ، ح)}

ب$_5$ = ك × ك .

3. تعطى المجموعات م = { ا ، ب ، حـ } ، $ب_1$ = { (ا ، ا) ؛ (ب ، ا) } .
$ب_2$ = { (ا ، ب) ؛ (ب ، ا) ؛ (حـ ، حـ) } ؛
$ب_3$ = { (ا ، ب) ؛ (ب ، ب) ؛ (ب ، حـ) }
أوجد المجموعات $ب'_1$ ، $ب'_2$ ، $ب'_3$ التي تحتوي $ب_1$ ، $ب_2$ ، $ب_3$ على الترتيب بحيث تكون كل واحدة منها بيانا لعلاقة تكافؤ في م ويكون لها أصغر عدد ممكن من العناصر.

4. ما هو الخطأ الذي أرتكب في الاستدلال التالي :
« ع علاقة في مجموعة م تناظرية ومتعدية
مهما كان العنصران ا ، ب من المجموعة م لدينا :
ع (ا ، ب) ⇐ ع (ب ، ا) لأن العلاقة ع تناظرية .
ع (ا ، ب) ∧ ع (ب ، ا) ⇐ ع (ا ، ا) لأن العلاقة ع متعدية
إذن مهما كان العنصر ا لدينا : ع (ا ، ا) أي العلاقة ع انعكاسية »

5. م مجموعة ، ج (م) مجموعة أجزاء المجموعة م . ق مجموعة جزئية للمجموعة م
ع علاقة في ج (م) معرفة كما يلي :
ع (ا ، ب) ⟺ ا ∩ ق = ب ∩ ق
1) بين أن ع علاقة تكافؤ
2) نفرض أن ق = م ، ما هي عندئذ العلاقة ع ؟ ما هو صنف تكافؤ جزء ا من م ؟

6. ع علاقة في ص معرفة كما يلي :
ع (س ، ع) ⟺ [س − ع مضاعف للعدد 5]
بين أن ع علاقة تكافؤ
ما هي أصناف التكافؤ .

7. ع علاقة في $ص^2$ معرفة كما يلي :
ع [(ا ، ب) ؛ (حـ ، ء)] ⟺ ا + ء = ب + حـ
بين أن ع علاقة تكافؤ .

8. ع علاقة في ص × ص* معرفة كما يلي :

ع [(أ ، ب) ؛ (جـ ، د)] ⟸ أد = ب جـ

بين أن ع علاقة تكافؤ .

9. 1) ع علاقة في ح* معرفة كما يلي :

ع (س ، ع) ⟸ س ع > 0

بين أن ع علاقة تكافؤ

عين أصناف التكافؤ .

2) ع علاقة في ح معرفة كما يلي :

ع (س ، ع) ⟸ س ع ⩾ 0

بين أن ع ليست علاقة تكافؤ

10. ع علاقة في ص معرفة كما يلي :

ع (س ، ع) ⟸ س^2 − ع^2 = س − ع

بين أن ع علاقة تكافؤ

عين صنف تكافؤ العدد 1

11. ع علاقة في ط معرفة كما يلي :

ع (س ، ع) ⟸ [س = ع أو س + ع = 15]

عين بيان العلاقة ع

بين أن ع علاقة تكافؤ

عين ط \ ع

12. ع علاقة في ص معرفة كما يلي :

ع (س ، ع) ⟸ [س = ع أو ع = س − 1 أو ع = س + 1]

هل العلاقة ع انعكاسية ؟ هل هي تناظرية ؟ هل هي ضد تناظرية ؟ هل هي متعدية ؟

13. نقول إن العلاقة ع في مجموعة م دائرية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

∀ أ ∈ م ، ∀ ب ∈ م ، ∀ جـ ∈ م :

[ع (أ ، ب) ∧ ع (ب ، جـ)] ⟸ ع (جـ ، أ)

بين أنه إذا كانت علاقة دائرية وانعكاسية فهي علاقة تكافؤ .

14. ؈ نقطة من المستوي π ؛ π^* مجموعة نقط المستوي π بإستثناء النقطة ؈
ع علاقة في π^* معرفة كما يلي :
ع (م ، م′) ⇔ ؈ ، م ، م′ على استقامة واحدة .
بين أن ع علاقة تكافؤ
ما هي أصناف التكافؤ .

15. π مجموعة نقط المستوي . (ق) مستقيم في π . ع علاقة في π معرفة كما يلي :
ع (م ، م′) ⇔ يوجد مستقيم عمودي على (ق) ويشمل م ، م′
بين أن ع علاقة تكافؤ .

16. ا ، ب نقطتان متمايزتان من المستوي π . π_0 مجموعة نقط المستوي π بإستثناء النقطتين ا ، ب . ع علاقة في π_0 معرفة كما يلي :
ع (م ، م′) ⇔ $\widehat{\text{ا م ب}} = \widehat{\text{ا م′ ب}}$
بين أن ع علاقة تكافؤ
ما هو صنف تكافؤ نقطة حـ من π_0 ؟ .

17. (ق) مستقيم من المستوي π ، $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، $ع_4$ أربع علاقات في π معرفة كما يلي :
$ع_1$ (ا ، ب) ⇔ [ا ب] ∩ (ق) = Φ
$ع_2$ (ا ، ب) ⇔ [ا ب] ∩ (ق) مجموعة أحادية
$ع_3$ (ا ، ب) ⇔ (ق) يشمل منتصف القطعة [ا ب]
$ع_4$ (ا ، ب) ⇔ (ق) مماس للدائرة التي قطرها [ا ب]
ادرس خواص هذه العلاقات

18. $ع_1$ علاقة في ط × ط معرفة كما يلي :
• $ع_1$ [(ا ، ب) ؛ (ا′ ، ب′)] ⇔ [ا ⩽ ا′ و ب ⩽ ب′}
بين أن $ع_1$ علاقة ترتيب . هل هذا الترتيب كلّي ؟
• $ع_2$ علاقة في ط × ط معرفة كما يلي :
$ع_2$ [(ا ، ب) ؛ (ا′ ، ب′)] ⇔ [(ا < ا′) أو (ا = ا′ و ب ⩽ ب′)]
بين أن $ع_2$ علاقة ترتيب . هل هذا الترتيب كلّي ؟

19. ع علاقة في ح معرفة كما يلي :

ع (أ ، ب) $\Leftrightarrow$ $أ^3 - ب^3 \geqslant 0$

بين أن ع علاقة ترتيب

هل هذا الترتيب كلّي ؟

الدوال والتطبيقات :

20. عين مجموعة تعريف الدالة تا للمجموعة ح في نفسها في كل حالة من الحالات التالية :

$تا(س) = \frac{س^2 - 1}{س}$ ، $تا(س) = \frac{س^2 - 1}{س + 3}$ ، $تا(س) = \frac{س}{س^2 - 1}$

$تا(س) = \frac{س + 3}{س^2 + 1}$ ، $تا(س) = \frac{س + 3}{س^2 - 4س + 4}$

$تا(س) = \frac{س^2 - 5س}{|س| - 3}$ $تا(س) = \frac{س^2 + 5}{|س - 3|}$ ،

$تا(س) = \frac{2س + 5}{|س| + 3}$ ، $تا(س) = \frac{1}{|س + 3| - |س - 4|}$

$تا(س) = \sqrt{2س + 3}$ ، $تا(س) = \sqrt{3 - 2س}$ ،

$تا(س) = \sqrt{2س^2 + 1}$

$تا(س) = \sqrt{2س + 5} + \sqrt{2س - 5}$ ، $تا(س) = 2\sqrt{س}$ ،

$تا(س) = \frac{-1}{\sqrt{س}}$

$تا(س) = \sqrt{3س + 4} - \sqrt{4 - 3س}$ ، $تا(س) = \frac{س + 1}{\sqrt{س + 3}}$ ،

$تا(س) = \sqrt{\frac{2س + 1}{3س - 2}}$ $تا(س) = \frac{\sqrt{2س + 1}}{\sqrt{2 - 3س}}$ ،

$تا(س) = \sqrt{|س - 2|}$ ، $تا(س) = \sqrt{|س + 1| - |2س - 4|}$

تا (س) = $\sqrt{|س| + 2}$ ، تا (س) $\sqrt{|س| - 2}$. (تا (س) = $\frac{س - 4}{\sqrt{|2س + 1|}}$

؛ تا (س) = $\sqrt{س^2 - 6س + 9}$ ؛ تا (س) = $\frac{\sqrt{2س + 5}}{4س^2 - 9}$

تا (س) = $\sqrt{س (س - 1)} + \sqrt{س (س + 1)}$.

تا (س) = $\sqrt{-(س - 1)^2}$

21. ف = { 1 ، 2 ، 3 } ، ج (ف) مجموعة أجزاء المجموعة ف . نعتبر التطبيق تا للمجموعة ج (ف) في نفسها المعرف كما يلي :

تا (أ) = أ ∩ { 1 ، 2 }

- عين عناصر المجموعة ج (ف)
- عين العناصر س من ج (ف) بحيث يكون تا (س) = ∅
- هل توجد في ج (ف) عناصر س بحيث يكون تا (س) = ف ؟
- استنتج مما سبق أن التطبيق تا غير غامر وغير متباين

22. ك مجموعة و ج (ك) مجموعة أجزائها . تا تطبيق للمجموعة ج (ك) في نفسها معرف كما يلي :

تا (أ) = أ' حيث أ' هي متممة أ إلى ك

أثبت أن التطبيق تا تقابلي وأن $تا^{-1}$ = تا

23. نعتبر المجموعة ك = { س ∈ ط ، 0 ⩽ س ⩽ 23 } والتطبيق تا للمجموعة ك في المجموعة { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 } المعرف كما يلي :

تا (س) = ب ، حيث ب هو باقي قسمة س على 5

هل التطبيق تا غامر ؟ هل هو متباين ؟

24. نعتبر التطبيق تا للمجموعة ح* في ح − { 3 } المعرف كما يلي :

$$\text{تا}\,(\text{س}) = \frac{3\,\text{س} - 1}{\text{س}}$$

أثبت أن التطبيق تا تقابلي ثم عيّن تطبيقه العكسي تا^{-1}

25. تا تطبيق للمجموعة ح في نفسها حيث تا (س) = 2 س + 5

• هل تا غامر ؟ هل تا متباين ؟
• نفس الأسئلة من أجل كل حالة من الحالات التالية :

تا (س) = س^2 ؛ تا (س) = | س | ؛ تا (س) = $\sqrt{\text{س}^2 + 2}$

26. ها تطبيق للمجموعة ح* − { 1 } في نفسها حيث :

$$\text{ها}\,(\text{س}) = \frac{\text{س} - 1}{\text{س}}$$

• أثبت أن ها تقابل ثم عيّن تطبيقه العكسي ها^{-1}
• عيّن التطبيقات التالية : (ها ∘ ها) ، (ها ∘ ها ∘ ها)

27. أ ، ب عددان حقيقيان ، ك =] أ ، + ∞ [، ل =] ب ، + ∞ [،
ها تطبيق للمجموعة ك في ل حيث ها (س) = 2 س^2 − 1
1) عيّن أصغر قيمة ممكنة للعدد أ وأصغر قيمة ممكنة للعدد ب بحيث يكون التطبيق ها تقابليا .
2) نفس المسألة من أجل :
ها (س) = $\sqrt{2\,\text{س} - 5}$

28. تا تطبيق للمجموعة ط في نفسها حيث :

تا (س) = $\frac{\text{س}}{2}$ إذا كان س زوجيا

تا (س) = 0 إذا كان س فرديا

هل تا غامر ؟ هل هو متباين ؟

29. تا ، ها تطبيقان للمجموعة ط في نفسها حيث :

تا (س) = 2 س

ها (س) = $\frac{س}{2}$ إذا كان س زوجيا

ها (س) = $\frac{س - 1}{2}$ إذا كان س فرديا

- هل تا ، ها غامران ؟ هل هما متباينان ؟
- عين التطبيقين (تا ∘ ها) ؛ (ها ∘ تا)

30. يعطى التطبيقان تا ، ها للمجموعة ح في نفسها

عين التطبيقين (ها ∘ تا) ، و (تا ∘ ها) في كل حالة من الحالات التالية

- تا (س) = $-\frac{3}{2}$ س + 5 وَ ها (س) = 4 س − 1
- تا (س) = 2 س^2 − 1 وَ ها (س) = 4 − 3 س
- تا (س) = س^3 وَ ها (س) = 2 س − 1

31. ليكن تا ، ها تطبيقين للمجموعة ح في نفسها حيث :

تا (س) = 3 س + 5 وَ ها (س) = $\frac{1}{2}$ س − 1

- أثبت أن التطبيقين تا و ها تقابليان
- عين التطبيقات التالية تا$^{-1}$ ، ها$^{-1}$ ؛ (تا$^{-1}$ ∘ ها$^{-1}$) ؛ (ها$^{-1}$ ∘ تا$^{-1}$)
- أثبت أن التطبيقين (ها ∘ تا) و (تا ∘ ها) تقابليان
- تحقق أن : (ها ∘ تا)$^{-1}$ = تا$^{-1}$ ∘ ها$^{-1}$

(تا ∘ ها)$^{-1}$ = ها$^{-1}$ ∘ تا$^{-1}$

32. (ى) دائرة مركزها م ، تا التطبيق للدائرة (ى) في نفسها الذي يرفق بكل نقطة ﻫ من (ى) النقطة ﻫ′ بحيث تكون النقطة م منتصف [ﻫ ﻫ′]

أثبت أن التطبيق تا تقابلي وأن تا$^{-1}$ = تا

33. لتكن (ی) قوساً من دائرة طرفاها ا ، ب . ها التطبيق للقوس (ی) في الوتر [ا ب] الذي يرفق بكل نقطة ه من (ی) النقطة ه′ بحيث تكون ه′ المسقط العمودي للنقطة ه على (ا ب)
هل التطبيق ها غامر ؟ هل هو متباين ؟ هل هو تقابلي ؟

العمليات الداخلية :

34. ك = { 1 ، 2 ، 3 } ، ★ علاقة من ك × ك نحو ك ترفق بكل ثنائية (ا ، ب) العنصر (ا ★ ب) ، إن وجد ، المعرف كما يلي :

ا ★ ب = 1 إذا كان (ا + ب) فردياً

ا ★ ب = 2 إذا كان (ا + ب) زوجياً

أحسب 3 ★ 2 ، 1 ★ 3 ، 2 ★ 2

هل ★ عملية داخلية في ك ؟

35. ط مجموعة الأعداد الطبيعية ، ★ علاقة من ط × ط نحو ط ترفق بكل ثنائية (ا ، ب) العنصر (ا ★ ب) . إن وجد ، المعرف كما يلي :

$$ا ★ ب = \frac{1}{2} (ا + ب)$$

هل ★ عملية داخلية في ط ؟

36. ف مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية ، ★ علاقة من ف × ف نحو ف ترفق بكل ثنائية (ا ، ب) العنصر (ا ★ ب) ، إن وجد ، المعرف كما يلي :

ا ★ ب = ا + 2 ب

هل ★ عملية داخلية في ف ؟

37. ف مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية ، △ علاقة من ف × ف نحو ف ترفق بكل ثنائية (ا ، ب) العنصر (ا △ ب) ، إن وجد ، المعرف كما يلي :

$$ا △ ب = \frac{ا + 3 ب}{2}$$

هل △ عملية داخلية في ف ؟

38.★ علاقة من ط × ط نحو ط ترفق بكل ثنائية (ا ، ب) العنصر (ا ★ ب) ، إن وجد ، المعرف كما يلي :

ا ★ ب = ب + 1

أثبت أن ★ عملية داخلية في ط

هل هي تبديلية ؟ هل هي تجميعية ؟

39. ★ عملية داخلية في مجموعة الأعداد الصحيحة ص معرفة كما يلي :

ا ★ ب = ا + ب − 3

هل هي تبديلية ؟ هل هي تجميعية ؟

هل يوجد في ص عنصر حيادي لهذه العملية ؟

هل لكل عنصر من ص نظير بالنسبة إلى هذه العملية ؟

40. ★ عملية داخلية في مجموعة الأعداد الطبيعية ط معرفة كما يلي :

ا ★ ب = 2 ا + 3 ب

هل هي تبديلية ؟ هل هي تجميعية ؟

هل يوجد في ط عنصر حيادي لهذه العملية ؟

41. ★ وَ △ عمليتان داخليتان في ط معرفتان كما يلي :

ا ★ ب = ا + 2 ب   وَ ا △ ب = 2 ا ب

أُدرس خاصّتي التبديل والتجميع لكلّ من ★ و △

هل △ توزيعية على ★ ؟

هل ★ توزيعية على △ ؟

42. ★ عملية داخلية في مجموعة الأعداد الناطقة الموجبة غير المعدومة ك$^*_+$ معرفة كما يلي :

$$ا ★ ب = ا + \frac{1}{ب}$$

هل هي تبديلية ؟ هل هي تجميعية ؟

43. ★ عملية داخلية في مجموعة الأعداد الناطقة الموجبة غير المعدومة $ك_+^*$ معرفة كما يلي :

$$ا ★ ب = 2ا + \frac{3}{ب}$$

هل هي تبديلية ؟ هل هي تجميعية ؟

44. Δ عملية داخلية في مجموعة الأعداد الناطقة ك معرفة كما يلي :

$$ا \Delta ب = ا + ب + ا ب$$

- هل هي تبديلية ؟ هل هي تجميعية ؟
- أثبتِ أن العدد 0 هو العنصر الحيادي للعملية Δ
- هل لكل عنصر نظير بالنسبة إلى Δ ؟
- أدرس توزيع Δ على الجمع (+) ؛ ثم توزيع الضرب (×) على Δ

45. Δ عملية داخلية في ك معرفة كما يلي :

$$ا \Delta ب = 3 ا ب$$

- هل هي تبديلية ؟ هل هي تجميعية ؟
- هل لكل عنصر نظير بالنسبة إلى Δ ؟

46. Δ عملية داخلية في مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة غير المعدومة $ح_+^*$ معرفة كما يلي :

$$ا \Delta ب = \frac{1}{ا} + \frac{1}{ب}$$

- هل هي تبديلية ؟ هل هي تجميعية ؟
- هل يوجد في $ح_+^*$ عنصر حيادي للعملية Δ ؟

47. Δ عملية داخلية في المجموعة $ط^*$ معرفة كما يلي :

$$ا \Delta ب = ا^{ب}$$

- هل Δ تبديلية ؟ هل Δ تجميعية ؟

48. ★ عملية داخلية في المجموعة $ح_+$ معرفة كما يلي :

$أ ★ ب = \sqrt{أ^2 + ب^2}$

- أثبت أن ★ تبديلية وتجميعية
- هل يوجد في $ح_+$ عنصر حيادي للعملية ★ ؟
- هل لكل عنصر من $ح_+$ نظير بالنسبة إلى ★ ؟

49. △ وَ ★ عمليتان داخليتان في المجموعة ك معرفتان كما يلي :

$أ △ ب = 2 أ ب$

$أ ★ ب = \frac{أ + ب}{2}$

- أُدرس خاصّتي التبديل والتجميع لكل من △ وَ ★
- أُدرس توزيعية △ على ★ ثم توزيعية ★ على △

50. ★ عملية داخلية في المجموعة ح معرفة كما يلي :

$أ ★ ب = 2 أ ب + 3 (أ + ب) + 3$

1) احسب $(0) ★ (-\frac{4}{3})$ ؛ $(\frac{1}{3}) ★ (-\frac{1}{3})$ ؛ $(-1) ★ (\sqrt{2})$ ؛ $(-\sqrt{3}) ★ (\frac{1}{2})$

2) عيّن العددين الحقيقيين س ، ع حيث : س ★ 2 = 1 وَ $(-2) ★ ع = ع$

3) بيّن أن العملية ★ تبادلية وتجميعية

4) بيّن أنه يوجد عنصر حيادي للعملية ★

5) أوجد الأعداد الحقيقية التي لكل منها نظير بالنسبة للعملية ★. احسب نظائر الأعداد : 0 ، (-1) ، $\sqrt{2}$

6) هل عملية الضرب في ح توزيعية على العملية ★ ؟

51. △ عملية داخلية في المستوى ترفق بكل ثنائية (أ ، ب) نظيرة النقطة أ بالنسبة إلى النقطة ب .

أثبت أن △ غير تبديلية وغير تجميعية

52. ف مجموعة دوائر المستوي . ★ عملية داخلية في ف ترفق بكل ثنائية ((ى) ، (ى′)) العنصر (ى″) المعرف كما يلي :
إذا كانت م ، م′ ، م″ مراكز الدوائر (ى) ، (ى′) ، (ى″) على الترتيب تكون م″ منتصف [م م′]
وإذا كانت بر ، بر′ ، بر″ أنصاف أقطار الدوائر (ى) ، (ى′) ، (ى″) على الترتيب يكون $بر'' = \frac{1}{2}(بر' + بر)$
- هل ★ تبديلية ؟ هل ★ تجميعية ؟

53. Δ عملية داخلية في المجموعة ح × ح معرفة كما يلي :
(ا ، ب) Δ (ا′ ، ب′) = (ا + ا′ ، ب + ب′)
- ادرس خاصّتي التبديل والتجميع للعملية Δ
- أثبت أنه يوجد في ح × ح عنصر حيادي للعملية Δ وأن لكل عنصر من ح × ح نظيراً بالنسبة إلى العملية Δ

54. ★ عملية داخلية في صہ × ح معرفة كما يلي :
(ا ، ب) ★ (ا′ ، ب′) = (ا + ا′ ، ب ب′)
- ادرس خاصّتي التبديل والتجميع للعملية ★
- أثبت أنه يوجد في صہ × ح عنصر حيادي للعملية ★ وأن لكل عنصر من صہ × ح نظيرا بالنسبة إلى العملية ★

55. Δ عملية داخلية في صہ × ط* معرفة كما يلي :
(ا ، ب) Δ (ا′ ، ب′) = (ا ب′ + ب ا′ ، ب ب′)
- ادرس خاصّتي التبديل والتجميع للعملية Δ
- أثبت أنه يوجد في صہ × ط* عنصر حيادي للعملية Δ
وأن لكل عنصر من صہ × ط* نظيرا بالنسبة إلى العملية Δ

56. ★ عملية داخلية في صہ معرفة كما يلي :
ا ★ ب = ا + ب + 2
- أثبت أن (صہ ، ★) زمرة تبديلية

57. ★ عملية في المجموعة ك − { − 1 } معرفة كما يلي :

أ ★ ب = أ + ب + أ ب

- أثبت أن (ك − { − 1 } ، ★) زمرة تبديلية

58. ∆ عملية داخلية في المجموعة ح − { 2 } معرفة كما يلي :

أ ∆ ب = (أ − 2) (ب − 2) + 2

- أثبت أن (ح − { 2 } ، ★) زمرة تبديلية

59. ل = { 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 } . ★ وَ ∆ عمليتان داخليتان في ل معرفتان كما يلي :

أ ★ ب = حـ حيث حـ هو رقم آحاد (أ + ب)

أ ∆ ب = حـ′ حيث حـ′ هو رقم آحاد (أ ب)

1) أكمل الجدول التالي بحيث يوضع
في خانة تقاطع سطر أ وعمود ب
العنصر أ ★ ب ، مثلا :
يوضع في خانة تقاطع سطر العدد 6
وعمود العدد 8 العنصر 6 ★ 8 الذي يساوي 4 .
يسمى هذا الجدول جدول العملية ★

★	0	2	4	6	8
0					
2			6		
4					
6					4
8					

2) أنشيء جدول العملية ∆

3) أثبت أن (ل ، ★) زمرة تبديلية

4) أثبت أن (ل ، ★ ، ∆) حلقة تبديلية واحدية

5) هل لكل عنصر من ل نظير بالنسبة إلى العملية ∆ ؟

60. $تا_1$ ، $تا_2$ ، $تا_3$ ، $تا_4$ أربعة تطبيقات للمجموعة ح* في نفسها معرفة كما يلي :

$تا_1$ (س) = س ، $تا_2$ (س) = − س ، $تا_3$ (س) = $\frac{1}{س}$ ،

$تا_4$ (س) = − $\frac{1}{س}$

1) أثبت أن هذه التطبيقات تقابلية

2) ل = { $تا_1$ ، $تا_2$ ، $تا_3$ ، $تا_4$ } . يرمز الرّمز ◦ إلى تركيب التطبيقات في ل
أثبت أن ◦ عملية داخلية في ل (يمكن لذلك استعمال جدول العملية كما هو موضّح في التمرين السّابق)
بيّن أن (ل ، ◦) زمرة تبديلية .

الباب الخامس

أشعـة المستـوى

15 ـ أشعة المستوى
16 ـ المحور والمعلم الخطي
17 ـ المعالم للمستوى
18 ـ مرجح نقطتين ـ مرجح ثلاث نقط
19 ـ المستقيم في الهندسة المستوية التحليلية

تعالج في هذا الباب . المفاهيم الأساسية في الأشعة وفي الهندسة المستوية التحليلية وهي مفاهيم قد تمّ تقديم معظمها في السنوات السابقة (مفهوم الشعاع . العمليات على الأشعة . التوازي . المحاور . المعالم . نظرية طاليس . .....)

وفي هذه السنة تراجع هذه المفاهيم بشكل موسّع وتدعم بتتمات لها ينبغي هنا . الإشارة إلى الدور الهام الذي يلعبه الحساب الشعاعي في الرياضيات وفي الفيزياء وبالتالي إلى ضرورة اكتساب تقنيات هذا الحساب

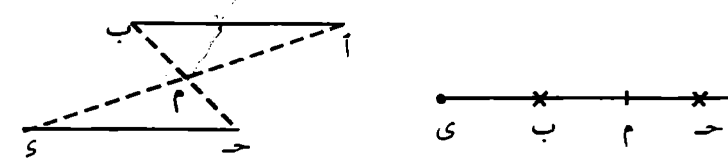
15 أشعـة المستـوى

1ـ علاقة التساير:

1.1ـ تعريف :

ا ، ب ، حـ ، ء أربع نقط من المستوى نقول عن الثنائية النقطية (ا ، ب) أنها تساير الثنائية النقطية (حـ ، ء) إذا وفقط إذا كان للقطعتين [اء] و [ب حـ] نفس المنتصف .

إذا كانت (ا ، ب) تساير (حـ ، ء) نكتب (ا ، ب) ~ (حـ ، ء)



الشكل 1 والشكل 2 يمثلان ثنائيتين نقطيتين (ا ، ب) و (حـ ، ء) تحققان (ا ، ب) ~ (حـ ، ء)

نلاحظ في الشكل 2 أن ا ب حـ ء متوازي أضلاع

2.1ـ خواص العلاقة

- العلاقة ~ **انعكاسية** لأنه من أجل كل ثنائية نقطية (ا ، ب) القطعتان [اب] و [با] لهما نفس المنتصف
- العلاقة ~ **تناظرية** لأنه من أجل كل ثنائيتين نقطيتين (ا ، ب) و (حـ ، ء) فإن (ا ، ب) ~ (حـ ، ء) ⇐ [اء] و [ب حـ] لهما نفس المنتصف
  ⇐ [ءا] و [حـب] لهما نفس المنتصف
  ⇐ (حـ ، ء) ~ (ا ، ب)
- **العلاقة متعدية**

نقبل بدون برهان هذه الخاصة الأخيرة إذن

علاقة التساير في مجموعة الثنائيات النقطية هي **علاقة تكافؤ**

2 ـ أشعة المستوى
1.2 ـ تعريف :

أ . ب نقطتان من المستوى يسمى صنف تكافؤ الثنائية (أ ب) وفق علاقة التسايُر **شعاعا** .

• يرمز إلى الشعاع المعين بالثنائية (أ . ب)
بالرمز $\overleftarrow{أب}$ أو بالرمز $\overleftarrow{ش}$
• إذا كان $\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{أب}$ تسمى الثنائية (أ . ب) ممثلا للشعاع $\overleftarrow{ش}$
وإذا انطبقت ب على أ . يسمى $\overleftarrow{ش}$ **الشعاع المعدوم**

$\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{أأ} = \overleftarrow{0}$

ش = أب

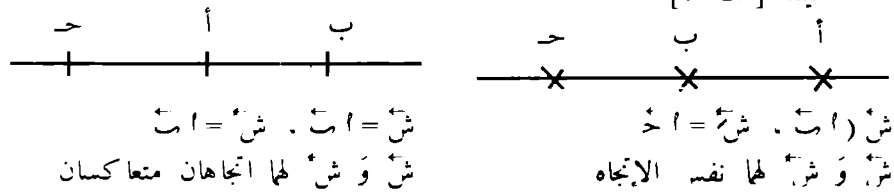
2.2 ـ تعاريف أخرى :
1.2.2 ـ طويلة شعاع :
(أ . ب) ممثل للشعاع $\overleftarrow{ش}$
نسمي طول القطعة المستقيمة [أ ب] طويلة الشعاع $\overleftarrow{ش}$ ونكتب $\| \overleftarrow{ش} \| =$ أ ب

2.2.2 ـ منحى شعاع :
إذا كان (أ . ب) ممثلا للشعاع غير المعدوم $\overleftarrow{ش}$ نقول أن **منحى المستقيم** (أ ب) هو منحى الشعاع $\overleftarrow{ش}$

ملاحظة : ليس للشعاع المعدوم منحى

3.2.2 ـ إتجاه شعاع :
$\overleftarrow{ش}$ وَ $\overleftarrow{ش'}$ شعاعان لهما نفس المنحى (أ . ب) ممثل للشعاع $\overleftarrow{ش}$ و (أ . حـ) ممثل للشعاع $\overleftarrow{ش'}$

• يكون للشعاعين $\overleftarrow{ش}$ و $\overleftarrow{ش'}$ نفس الإتجاه إذا كانت النقطة حـ تنتمي إلى نصف المستقيم [أ ب)
• يكون للشعاعين $\overleftarrow{ش}$ و $\overleftarrow{ش'}$ اتجاهان متعاكسان إذا كانت النقطة أ تنتمي إلى القطعة المستقيمة [ب حـ]



$\overleftarrow{ش}$ ($\overleftarrow{أب}$. $\overleftarrow{ش'} = \overleftarrow{أحـ}$
$\overleftarrow{ش}$ وَ $\overleftarrow{ش'}$ لهما نفس الإتجاه

$\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{أب}$. $\overleftarrow{ش'} = \overleftarrow{أحـ}$
$\overleftarrow{ش}$ وَ $\overleftarrow{ش'}$ لهما اتجاهان متعاكسان

3.2 تساوي شعاعين :

ا ، ب ، ح ، د أربع نقط من المستوى

• من تعريف علاقة التساير ينتج ما يلي :

$\overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{\text{حد}} \Leftrightarrow$ [ا د] وَ [ب ح] لهما نفس المنتصف

$$\overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{\text{حد}} \Leftrightarrow \overleftarrow{\text{اح}} = \overleftarrow{\text{بد}}$$

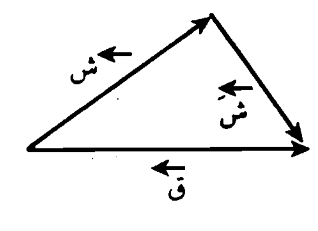
إذا كان $\overleftarrow{\text{اب}} \neq \vec{0}$ و $\overleftarrow{\text{حد}} \neq \vec{0}$ فإن ·

$\overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{\text{حد}} \Leftrightarrow \overleftarrow{\text{اب}}$ و $\overleftarrow{\text{حد}}$ لهما نفس المنحى ونفس الإتجاه ونفس الطويلة

3. الجمع الشعاعي :

1.3 . جمع شعاعين :

مجموع الشعاعين $\overleftarrow{\text{ش}}$ و $\overleftarrow{\text{ش}'}$ هوالشعاع $\overleftarrow{\text{ن}}$ المعرف كما يلي :



إذا كان (ا ، ب) ممثلا للشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ وكان (ب ، ح) ممثلا للشعاع $\overleftarrow{\text{ش}'}$

يكون (ا ، ح) ممثلا للشعاع $\overleftarrow{\text{ن}}$ ونكتب



$$\overleftarrow{\text{ن}} = \overleftarrow{\text{ش}} + \overleftarrow{\text{ش}'}$$

2.3 . خاصتان هامتان :

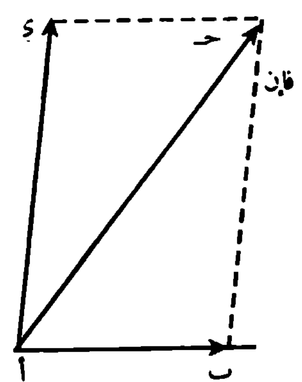
من التعريف السابق نستنتج ما يلي :

• إذا كان ا ، ب ، ح ثلاث نقط كيفية من المستوى فإن

$$\overleftarrow{\text{اب}} + \overleftarrow{\text{بح}} = \overleftarrow{\text{اح}}$$

• إذا كان ابحد متوازي أضلاع فإن

$$\overleftarrow{\text{اب}} + \overleftarrow{\text{اد}} = \overleftarrow{\text{اح}}$$



3.3 ـ خواص الجمع :

التطبيق الذي يرفق بكل ثنائية (شَ ، شَ') مجموع الشعاعين شَ و شَ' يسمى الجمع الشعاعي فهو عملية داخلية في مجموعة أشعة المستوى

للجمع الشعاعي الخواص التالية :

مهما تكن الأشعة شَ$_1$ ، شَ$_2$ ، شَ$_3$ فإن
شَ$_1$ + شَ$_2$ = شَ$_2$ + شَ$_1$ (الجمع الشعاعي تبديلي)
(شَ$_1$ + شَ$_2$) + شَ$_3$ = شَ$_1$ + (شَ$_2$ + شَ$_3$) (الجمع الشعاعي تجميعي)
شَ$_1$ + $\vec{0}$ = شَ$_1$ ($\vec{0}$ عنصر حيادي)
يوجد شَ$'_1$ حيث شَ$_1$ + شَ$'_1$ = شَ$'_1$ + شَ$_1$ = $\vec{0}$
(شَ$'_1$ نظير شَ$_1$ و شَ$'_1$ = − شَ$_1$

إذن مجموعة أشعة المستوى المزودة بالجمع الشعاعي **زمرة تبديلية**

4.3 ـ نتائج أخرى

ا ، ب ، حـ ، ء أربعة نقط من المستوى لدينا النتائج التالية :

ا بَ = − ب ا
حـ بَ = ا بَ − ا حـ
هـ ا + هـ بَ = $\vec{0}$ ⟺ هـ منتصف [ا ب]

4 ـ جداء شعاع بعدد حقيقي

1.4 . تعريف :

1) جداء الشعاع غير المعدوم شَ بالعدد الحقيقي غير المعدوم α هو الشعاع شَ' المعرف كما يلي :
• شَ وَ شَ' لهما نفس المنحى
• شَ وَ شَ' لهما نفس الاتجاه إذا كان $\alpha > 0$ واتجاهان متعاكسان إذا كان $\alpha < 0$
• ‖ شَ' ‖ = | α | . | شَ |
2) جداء الشعاع شَ بالعدد الحقيقي α هو الشعاع المعدوم $\vec{0}$ إذا كان شَ = $\vec{0}$ أو $\alpha = 0$

نرمز إلى جداء الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ بالعدد α بالرمز $\alpha\,\overleftarrow{\text{ش}}$

ب ح أ

ب أ ح

$$\overleftarrow{\text{أح}} = -2\,\overleftarrow{\text{أب}} \qquad \overleftarrow{\text{أح}} = \frac{2}{3}\,\overleftarrow{\text{أب}}$$

التطبيق الذي يرفق بكل ثنائية (α ، $\overleftarrow{\text{ش}}$) الجداء α $\overleftarrow{\text{ش}}$ يسمى ضرب شعاع بعدد حقيقي

2.4 .خواص ضرب شعاع بعدد حقيقي

مها يكن العددان الحقيقيان α ، β ومها يكن الشعاعان $\overleftarrow{\text{ش}}$ و $\overleftarrow{\text{ش}'}$ لدينا :

$$(\alpha + \beta)\,\overleftarrow{\text{ش}} = \alpha\,\overleftarrow{\text{ش}} + \beta\,\overleftarrow{\text{ش}}$$
$$\alpha\,(\overleftarrow{\text{ش}} + \overleftarrow{\text{ش}'}) = \alpha\,\overleftarrow{\text{ش}} + \alpha\,\overleftarrow{\text{ش}'}$$
$$\alpha\,(\beta\,\overleftarrow{\text{ش}}) = (\alpha\beta)\,\overleftarrow{\text{ش}}$$

مثلا لدينا :

$$8\,(3\,\overleftarrow{\text{ش}} + 2\,\overleftarrow{\text{ش}'}) - 5\,\overleftarrow{\text{ش}'} = 8\,(3\,\overleftarrow{\text{ش}}) + 8\,(2\,\overleftarrow{\text{ش}'}) - 5\,\overleftarrow{\text{ش}'}$$
$$= (8 \cdot 3)\,\overleftarrow{\text{ش}} + (8 \cdot 2)\,\overleftarrow{\text{ش}'} - 5\,\overleftarrow{\text{ش}'}$$
$$= 24\,\overleftarrow{\text{ش}} + 16\,\overleftarrow{\text{ش}'} - 5\,\overleftarrow{\text{ش}'}$$
$$= 24\,\overleftarrow{\text{ش}} + 11\,\overleftarrow{\text{ش}'}$$

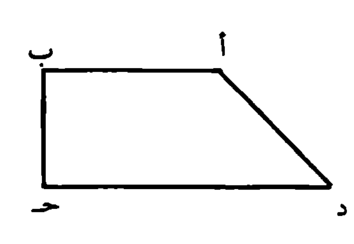
3.4. الأشعة المتوازية :

تعريف :

يكون الشعاعان غير المعدومين $\overleftarrow{\text{ش}}$ و $\overleftarrow{\text{ش}'}$ متوازيين إذا وفقط إذا كان لهما نفس المنحى

إذا كان $\overleftarrow{\text{ش}}$ و $\overleftarrow{\text{ش}'}$ متوازيين نكتب $\overleftarrow{\text{ش}} \parallel \overleftarrow{\text{ش}'}$

مثلا : • الشعاعان 2 $\overleftarrow{ش}$ و -5 $\overleftarrow{ش}$ متوازيان



• إذا كان ا ب حـ ء **شبه منحرف** قاعدتاه [ا ب] و [حـ ء] فإن الشعاعين $\overleftarrow{اب}$ و $\overleftarrow{حء}$ متوازيان.

من التعريف تنتج الخاصتان التاليتان :

• $\overleftarrow{ش} // \overleftarrow{ش'} \Leftarrow \exists\, \alpha \in ع : \overleftarrow{ش} = \alpha\, \overleftarrow{ش'}$
• ا ، ب ، حـ على استقامة واحدة $\Leftrightarrow \overleftarrow{اب} // \overleftarrow{اح}$

4.4. الارتباط الخطي لشعاعين :

تعريف :

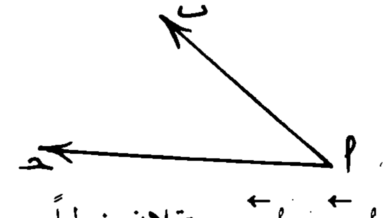
يكون الشعاعان $\overleftarrow{ش}$ و $\overleftarrow{ش'}$ مرتبطين خطيا إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان غير معدومين معا α ، β بحيث $\alpha\, \overleftarrow{ش} + \beta\, \overleftarrow{ش'} = \overleftarrow{0}$.

• الارتباط الخطي لشعاعين غير معدومين يعني توازيهما لأن

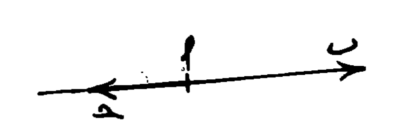
$$\overleftarrow{ش'} = \alpha\, \overleftarrow{ش} \Leftrightarrow \alpha\, \overleftarrow{ش} + (-1)\, \overleftarrow{ش'} = \overleftarrow{0}$$

• الشعاع المعدوم $\overleftarrow{0}$ مرتبط خطيا مع أي شعاع لأن $1 \,.\, \overleftarrow{0} + 0\, \overleftarrow{ش} = \overleftarrow{0}$

• إذا كان شعاعان $\overleftarrow{ش}$ و $\overleftarrow{ش'}$ غير مرتبطين خطيا نقول أنهما مستقلان خطيا وهذا يعني أنهما غير معدومين وغير متوازيين.



$\overleftarrow{\text{اب}}$ و $\overleftarrow{\text{اح}}$ مستقلان خطياً



$\overleftarrow{\text{اب}}$ و $\overleftarrow{\text{اح}}$ مرتبطان خطياً

تمرين محلول :

> اب ح مثلث . د ، هـ نقطتان حيث $\overleftarrow{\text{اد}} = \frac{1}{3}\overleftarrow{\text{اب}}$
>
> وَ $\overleftarrow{\text{اهـ}} = -\frac{1}{2}\overleftarrow{\text{بح}}$
>
> بيّن أن النقط الثلاث د ، ح ، هـ على استقامة واحدة .

لدينا

$$\overleftarrow{\text{دح}} = \overleftarrow{\text{دا}} + \overleftarrow{\text{اب}} + \overleftarrow{\text{بح}}$$

$$= \overleftarrow{\text{دا}} + 3\,\overleftarrow{\text{اد}} - 2\,\overleftarrow{\text{اهـ}} \quad (\text{لأن } \overleftarrow{\text{اد}} = \frac{1}{3}\overleftarrow{\text{اب}} \text{ و } \overleftarrow{\text{اهـ}} = -\frac{1}{2}\overleftarrow{\text{بح}})$$

$$= -2\,\overleftarrow{\text{دا}} - 2\,\overleftarrow{\text{اهـ}} \quad (\text{لأن } \overleftarrow{\text{دا}} + 3\,\overleftarrow{\text{اد}} = -2\,\overleftarrow{\text{دا}})$$

$$= -2\,(\overleftarrow{\text{دا}} + \overleftarrow{\text{اهـ}})$$

$$= -2\,\overleftarrow{\text{دهـ}}$$

نستنتج من المساواة $\overleftarrow{\text{دح}} = -2\,\overleftarrow{\text{دهـ}}$ أن الشعاعين $\overleftarrow{\text{دح}}$ و $\overleftarrow{\text{دهـ}}$ متوازيان .

إذن النقط الثلاث د ، ح ، هـ على استقامة واحدة

16 المحور . المعلم الخطّي

1 ـ المحور :

1.1 ـ تعاريف :

(ق) مستقيم ، $\vec{و}$ شعاع غير معدوم منحاه هو منحى المستقيم (ق)
تسمى الثنائية (ق ، $\vec{و}$) محوراً .

المستقيم (ق) هو حامل المحور (ق ، $\vec{و}$)

الشعاع $\vec{و}$ هو شعاع الواحدة للمحور (ق ، $\vec{و}$)

2.1 ـ القَيْسُ الجبري لشعاع :

(ق ، $\vec{و}$) محور ، مهما كان الشعاع $\vec{ش}$ الموازي للشعاع $\vec{و}$ فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد س بحيث يكون : $\vec{ش} = س \vec{و}$

- يسمى هذا العدد الحقيقي س **القَيْسَ الجبري** للشعاع $\vec{ش}$ بالنسبة إلى شعاع الواحدة $\vec{و}$.
- القيس الجبري للشعاع المعدوم بالنسبة إلى أي شعاع غير معدوم هو العدد 0.
- إذا كان (ا ، ب) ممثلا للشعاع $\vec{ش}$ على المستقيم (ق) يُرمز إلى القيس الجبري للشعاع $\vec{ش}$ بالنسبة إلى الشعاع $\vec{و}$ بالرمز $\overline{اب}$

ونكتب : $\vec{ش} = \vec{اب} = \overline{اب} . \vec{و}$

3.1 ـ علاقة شال :

(ق ، $\vec{و}$) محور .

إذا كانت ا ، ب ، حـ ثلاث نقط من المستقيم (ق) فإن المساواة
$\vec{اب} + \vec{بحـ} = \vec{احـ}$ تكتب باستعمال الأقياس الجبرية :

$\overline{اب} + \overline{بحـ} = \overline{احـ}$ (علاقة شال)

2 ـ المعلم الخطي :

1.2 ـ تعاريف :

(ق) مستقيم ، $\overleftarrow{و}$ شعاع غير معدوم منحاه هو منحى المستقيم (ق) م نقطة من (ق) .

- تسمى الثنائية المرتبة (م ، $\overleftarrow{و}$) معلماً للمستقيم (ق) .
- النقطة م هي مبدأ المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$).
- الشعاع $\overleftarrow{و}$ هو شعاع الواحدة للمعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) .

ملاحظة : إذا كانت أ ، ب نقطتين مختلفتين من المستقيم (ق) فإن الثنائية المرتبة (أ ، ب) تُعيّن معلماً للمستقيم (ق) ذا المبدأ أ وشعاع الواحدة $\overleftarrow{أب}$.

2.2 ـ فاصلة نقطة :

(م ، $\overleftarrow{و}$) معلم للمستقيم (ق) .

- فاصلة النقطة ن من (ق) في المغلم (م ، $\overleftarrow{و}$) هي القيس الجبري للشعاع $\overleftarrow{من}$ بالنسبة إلى الشعاع $\overleftarrow{و}$.

وبعبارة أخرى :

- فاصلة النقطة ن في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) هي العدد الحقيقي س الذي يحقق المساواة :

$$\overleftarrow{من} = س \overleftarrow{و}$$

- إذا كان س عدداً حقيقياً فإنه توجد نقطة وحيدة ن من (ق) فاصلتها س في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$)

3.2 ـ نتائج :

(ق) مستقيم ، $(م ، \vec{و})$ معلم للمستقيم (ق) .

ا ، ب ، م ، ي أربع نقط من (ق) فواصلها في المعلم $(م ، \vec{و})$:

$س_ا$ ، $س_ب$ ، $س_م$ ، $س_ي$ على الترتيب .

- **القَيْس الجبري للشعاع $\overline{ا ب}$**

لدينا $\overline{ا ب} = \overline{ا م} + \overline{م ب}$. من المساواة $\overline{ا ب} = \overline{م ب} - \overline{م ا}$ نستنتج :

$$\boxed{\overline{ا ب} = س_ب - س_ا}$$

- **فاصلة النقطة ي منتصف القطعة [ا ب]**

ي منتصف [ا ب] $\Leftrightarrow \overrightarrow{ي ا} + \overrightarrow{ي ب} = \vec{0}$

$$\overline{ي ا}\,\vec{و} + \overline{ي ب}\,\vec{و} = 0\,\vec{و}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{ي ا} + \overline{ي ب})\,\vec{و} = 0\,\vec{و}$$

$$\Leftrightarrow \overline{ي ا} + \overline{ي ب} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overline{ي م} + \overline{م ا}) + (\overline{ي م} + \overline{م ب}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{م ا} + \overline{م ب} = 2\,\overline{م ي}$$

$$\boxed{\text{إذن} \quad س_ي = \frac{1}{2}(س_ا + س_ب)}$$

4.2 ـ تمرين محلول :

(ق) مستقيم ؛ $(م ، \overleftarrow{و})$ معلم للمستقيم (ق) .
أ ، ب ، حـ ثلاث نقط من (ق) فواصلها في المعلم $(م ، \overleftarrow{و})$:
+ 3 ، − 1 ، + 5 على الترتيب
ي منتصف القطعة [ب حـ] .

1) احسُب القيسين الجبريين للشعاع $\overleftarrow{ب حـ}$ بالنسبة إلى الشعاع $\overleftarrow{و}$ وبالنسبة إلى الشعاع $\overleftarrow{م أ}$.
2) احسُب س ، سَ ، سً فواصل النقطة ي في المعالم $(م ، \overleftarrow{و})$ ؛ $(أ ، \overleftarrow{و})$ ؛ $(أ ، \overleftarrow{أ حـ})$ على الترتيب .

لدينا : $\overleftarrow{م أ} = 3 \overleftarrow{و}$ ؛ $\overleftarrow{م ب} = - \overleftarrow{و}$ ؛ $\overleftarrow{م حـ} = 5 \overleftarrow{و}$

1) • $\overleftarrow{ب حـ} = \overleftarrow{م حـ} - \overleftarrow{م ب}$

$= 5 \overleftarrow{و} - (- \overleftarrow{و}) = 6 \overleftarrow{و}$

إذن القيس الجبري للشعاع $\overleftarrow{ب حـ}$ بالنسبة إلى الشعاع $\overleftarrow{و}$ هو العدد (+ 6) .

• $\overleftarrow{ب حـ} = 6 \overleftarrow{و}$

$= 2 (3 \overleftarrow{و}) = 2 \overleftarrow{م أ}$

إذن القيس الجبري للشعاع $\overleftarrow{ب حـ}$ بالنسبة إلى الشعاع $\overleftarrow{م أ}$ هو العدد (+ 2)

2) نعلم أن $س = \frac{س_{ب} + س_{حـ}}{2}$

إذن $س = \frac{-1 + 5}{2} = 2$

لدينا $\overleftarrow{م ي} = \overleftarrow{م أ} + \overleftarrow{أ ي}$

أي $2 \overleftarrow{و} = 3 \overleftarrow{و} + \overleftarrow{أ ي}$

إذن $\overleftarrow{أي} = -\overleftarrow{و}$ ومنه : $س' = -1$

لدينا $\overleftarrow{أحـ} = \overleftarrow{م حـ} - \overleftarrow{م أ}$

$= 5\overleftarrow{و} - 3\overleftarrow{و} = 2\overleftarrow{و}$

من المساواتين $\overleftarrow{أحـ} = 2\overleftarrow{و}$ ؛ $\overleftarrow{أي} = -\overleftarrow{و}$ نستنتج $\overleftarrow{أي} = -\frac{1}{2}\overleftarrow{أحـ}$

ومنه $س'' = -\frac{1}{2}$.

3 ـ نظرية طاليس :

1.3 ـ الإسقاط على مستقيم :

(ق) و (Δ) مستقيمان من المستوي متقاطعان

تعريف

نسمي إسقاطاً على (ق) وفق منحى (Δ) التطبيق الذي يرفق بكل نقطة ۿ من المستوي النقطة ۿ' التي هي نقطة تقاطع المستقيم (ق) مع المستقيم الذي يوازي (Δ) ويشمل النقطة ۿ

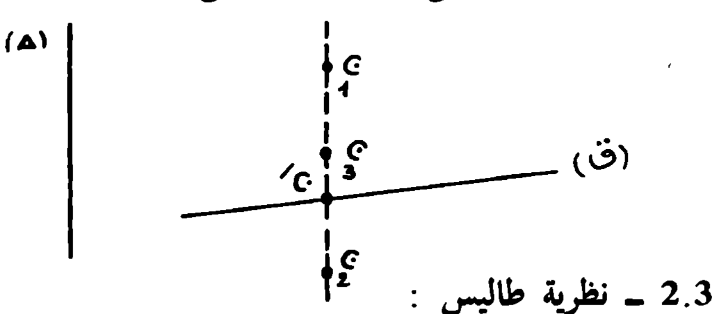
(Δ)
ۿ'
ۿ
(ق)

- تسمى النقطة ۿ' مسقط النقطة ۿ
- إذا كان (Δ) عمودياً على (ق) فالإسقاط على (ق) وفق منحى (Δ) يسمى إسقاطاً عمودياً على (ق)

ملاحظات :

1) كل نقط مستقيم يوازي (Δ) لها نفس المسقط بالإسقاط على (ق) وفق منحى (Δ) .

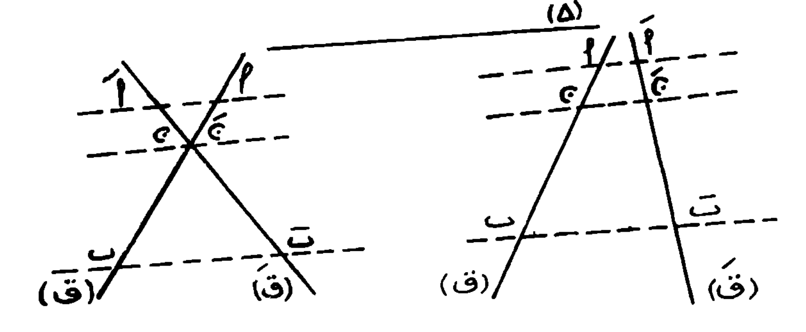
2) كل نقطة من (ق) تنطبق على مسقطها بالإسقاط على (ق) وفق منحى (Δ)



2.3 ـ نظرية طاليس :

(ق ، $\overleftarrow{و}$) ؛ (ق′ ، $\overleftarrow{و'}$) محوران . (Δ) مستقيم لا يوازي المستقيم (ق) ولا يوازي المستقيم (ق′) . تا هو الإسقاط على (ق′) وفق منحى (Δ) .
ا ، ب نقطتان متمايزتان من (ق) مسقطاهما ا′ ، ب′ بالإسقاط تا .
مهما كانت النقطة م من (ق) وَمهما كانت النقطة م′ من (ق′)
لدينا التكافؤ التالي :

(م′ هي مسقط م بالإسقاط تا) $\Longleftrightarrow$ ($\dfrac{\overline{ام}}{\overline{اب}} = \dfrac{\overline{ا'م'}}{\overline{ا'ب'}}$)



ملاحظة :

من الواضح أن $\overline{ام}$ و $\overline{اب}$ قَيْسان جبريان بالنسبة إلى الشعاع $\overleftarrow{و}$ وَ $\overline{ا'م'}$ ، $\overline{ا'ب'}$ قيسان جبريان بالنسبة إلى الشعاع $\overleftarrow{و'}$.

3.3 ـ تمرين محلول :

أ ب جـ د رباعي محدّب ؛ م هي نقطة تقاطع قطريه [أ جـ] ؛ [ب د] .

المستقيم الذي يشمل م وَيوازي (ب جـ) يقطع (أ ب) في النقطة ن .

المستقيم الذي يشمل م وَيوازي (جـ د) يقطع (أ د) في النقطة هـ .

بين أن المستقيمين (ن هـ) وَ (ب د) متوازيان .

لنعتبر الإسقاط على (أ ب) وفق منحى (ب جـ) حسب نظرية طاليس ، لدينا :



$$\frac{\overline{\text{أن}}}{\overline{\text{أب}}} = \frac{\overline{\text{أم}}}{\overline{\text{أجـ}}} \qquad (1)$$

لنعتبر الإسقاط على (أ د) وفق منحى (د جـ) حسب نظرية طاليس .

لدينا :

$$\frac{\overline{\text{أم}}}{\overline{\text{أجـ}}} = \frac{\overline{\text{أهـ}}}{\overline{\text{أد}}} \qquad (2)$$

من المساواتين (1) وَ (2) نستنتج المساواة : $\frac{\overline{\text{أن}}}{\overline{\text{أب}}} = \frac{\overline{\text{أهـ}}}{\overline{\text{أد}}}$ (3)

المساواة (3) تعني أن النقطة ن هي مسقط النقطة هـ بالإسقاط على (أ ب) وفق منحى (ب د) .

إذن (ن هـ) يوازي (ب د) .

17 المعالم للمستوي

1 ـ الأسس :

1.1 ـ تعريف :

$\vec{و}$ ، $\vec{ي}$ شعاعان من المستوي
تكون الثنائية ($\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) أساساً للمستوي إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$ مستقلين خطيا

نستنتج مباشرة من التعريف ما يلي :
1) تكون الثنائية ($\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) أساسا للمستوي إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$ غير معدومين وغير متوازيين .
2) إذا كان ($\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) أساساً للمستوي وكان α ، β عددين حقيقيين فإن

$$\alpha \vec{و} + \beta \vec{ي} = \vec{0} \Leftarrow \alpha = \beta = 0$$

2.1 ـ المركبتان السلميتان لشعاع :

($\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) أساس للمستوي
(م ، ا) ممثل للشعاع $\vec{و}$ ، (م ، ب) ممثل للشعاع $\vec{ي}$
$\vec{ش}$ شعاع من المستوي وَ (م ، ه) ممثل له
نسمي ا' مسقط النقطة ه على (م ا) وفق منحى (م ب)
وَنسمي ب' مسقط النقطة ه على (م ب) وفق منحى (م ا)
[الشكل 1]

لدينا :
1) $\overrightarrow{مه} = \overrightarrow{ما'} + \overrightarrow{مب'}$ (لأن م ا' ه ب' متوازي أضلاع)

2) النقط م ، أ ، أ' على استقامة واحدة وكذلك النقط م ، ب ، ب' على استقامة واحدة

إذن : يوجد عددان حقيقيان س ، ع حيث

$\overleftarrow{مأ'} = س \overleftarrow{مأ}$ و $\overleftarrow{مب'} = ع \overleftarrow{مب}$

(الشكل 1)

مما سبق نستنتج أنه يوجد عددان حقيقيان س ، ع حيث

$\overleftarrow{مت} = س \overleftarrow{مأ} + ع \overleftarrow{مب}$

أي : $\overleftarrow{ش} = س \overleftarrow{و} + ع \overleftarrow{ي}$

هل الثنائية (س ، ع) وحيدة ؟

نفرض أنه توجد ثنائية أخرى (س' ، ع') حيث $\overleftarrow{ش} = س' \overleftarrow{و} + ع' \overleftarrow{ي}$

$س \overleftarrow{و} + ع \overleftarrow{ي} = س' \overleftarrow{و} + ع' \overleftarrow{ي} \Leftarrow (س \overleftarrow{و} - س' \overleftarrow{و}) + (ع \overleftarrow{ي} - ع' \overleftarrow{ي}) = \overleftarrow{0}$

$\Leftarrow (س - س') \overleftarrow{و} + (ع - ع') \overleftarrow{ي} = \overleftarrow{0}$

ونعلم أن $(س - س') \overleftarrow{و} + (ع - ع') \overleftarrow{ي} = \overleftarrow{0} \Leftarrow س - س' = 0$
و
$ع - ع' = 0$

لأن الشعاعين $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$ مستقلان خطيا

إذن : س = س' و ع = ع' والثنائية (س ، ع) وحيدة .

نظرية وتعريف :

إذا كان ($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) أساسا للمستوي وكان $\overleftarrow{ش}$ شعاعاً من المستوي فإنه توجد ثنائية وحيدة (س ، ع) من ح × ح حيث

$\overleftarrow{ش} = س \overleftarrow{و} + ع \overleftarrow{ي}$

يسمى العددان الحقيقيان س ، ع المركبتين السلميتين للشعاع $\overleftarrow{ش}$ بالنسبة إلى الأساس ($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

الترميز :

1) إذا كانت س ، ع المركبتين السلميتين للشعاع $\overleftarrow{ش}$ بالنسبة إلى الأساس ($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) نكتب $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}_{(\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})}$

2) إذا لم يكن هناك التباس على الأساس وكانت س ، ع المركبتين السلميتين للشعاع $\overleftarrow{ش}$ نكتب

$$\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix} \text{ أو } \overleftarrow{ش} \; (س ، ع)$$

ملاحظة :

العدد الحقيقي س الوارد في الترميز يسمى المركبة الأولى للشعاع $\overleftarrow{ش}$ والعدد الحقيقي ع الوارد في الترميز يسمى المركبة الثانية للشعاع $\overleftarrow{ش}$
إذا كان الشعاع $\overleftarrow{ش}$ موازيا للشعاع $\overleftarrow{و}$ فإن مركبته الثانية معدومة وإذا كان الشعاع $\overleftarrow{ش}$ موازيا للشعاع $\overleftarrow{ي}$ فإن مركبته الأولى معدومة .

3.1 ـ نتائج :

($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) أساس للمستوي ، $\overleftarrow{ش}$ شعاع مركبتاه $\begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$

وَ $\overleftarrow{ش'}$ شعاع مركبتاه $\begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$ ، ك عدد حقيقي .

لدينا النتائج التالية :

- **تساوي شعاعين :** $\boxed{\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{ش'} \Leftrightarrow س = س' \text{ و } ع = ع'}$

• **مركبتا مجموع شعاعين :**

المركبتان السلميتان للشعاع $\overleftarrow{ش} + \overleftarrow{ش'}$ هما $\begin{pmatrix} س + س' \\ ع + ع' \end{pmatrix}$

• **مركبتا الشعاع ك $\overleftarrow{ش}$**

المركبتان السلميتان للشعاع ك $\overleftarrow{ش}$ هما $\begin{pmatrix} ك س \\ ك ع \end{pmatrix}$

4.1 ـ توازي شعاعين :

لقد رأينا في درس سابق أن شعاعين غير معدومين $\overleftarrow{ش}$ و $\overleftarrow{ش'}$ يتوازيان إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير معدوم ك بحيث يكون $\overleftarrow{ش'} = ك \overleftarrow{ش}$

لنبحث في هذه الفقرة عن شرط لازم وكافٍ لتوازي شعاعين $\overleftarrow{ش}$ ، $\overleftarrow{ش'}$ وذلك باستعمال مركبتي كل منهما (س ، ع) وَ (س' ، ع') بالنسبة إلى أساس ($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$).

1)• إذا كان $\overleftarrow{ش'}$ و $\overleftarrow{ش}$ متوازيين وكان $\overleftarrow{ش}$ غير معدوم فإنه يوجد عدد حقيقي ك حيث $\overleftarrow{ش'} = ك \overleftarrow{ش}$

أي س' = ك س و ع' = ك ع

بما أن $\overleftarrow{ش}$ غير معدوم فأحد العددين س ، ع غير معدوم .

إذا كان مثلا س $\neq 0$ يمكننا أن نكتب ك = $\frac{س'}{س}$

وبالتالي : ع' = $\frac{س'}{س}$ ع

أي س ع' − ع س' = 0	(1)

• إذا كان $\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{0}$ فالعددان س ، ع **معدومان والمساواة (1) محققة**

2) لنفرض الآن أن $س ع' - ع س' = 0$ (1)

- إذا كان $\overleftarrow{ش}$ معدوما نعلم اصطلاحا أن $\overleftarrow{ش}$ و $\overleftarrow{ش'}$ متوازيان
- إذا كان $\overleftarrow{ش}$ غير معدوم فأحد العددين س ، ع غير معدوم.

نفرض مثلا $س \neq 0$

عندئذ المساواة (1) تُكتب $ع' = \frac{س'}{س} ع$

ينتج من هذا ومن المساواة $\overleftarrow{ش'} = س' \overleftarrow{و} + ع' \overleftarrow{ي}$ أن :

$$\overleftarrow{ش'} = س' \overleftarrow{و} + \frac{س'}{س} ع \overleftarrow{ي}$$

$$= \frac{س'}{س} (س \overleftarrow{و} + ع \overleftarrow{ي})$$

$$= \frac{س'}{س} \overleftarrow{ش}$$

وهذا يعني أن الشعاعين $\overleftarrow{ش}$ و $\overleftarrow{ش'}$ متوازيان

نظرية :

يكون الشعاع $\overleftarrow{ش}$ ذو المركبتين (س ، ع) والشعاع $\overleftarrow{ش'}$ ذو المركبتين (س' ، ع') متوازيين إذا وفقط إذا تحققت المساواة

$س ع' - ع س' = 0$

العدد الحقيقي **س ع' - ع س'** يسمى محدد الثنائية ($\overleftarrow{ش}$ ، $\overleftarrow{ش'}$)

ونكتب : $\begin{vmatrix} س & س' \\ ع & ع' \end{vmatrix} = س ع' - ع س'$

2 ـ المعالم للمستوي :

1.2 ـ تعريف :

> إذا كانت م نقطة من المستوى وكان ($\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ي}}$) أساسا للمستوي فإن الثلاثية (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ي}}$) تسمى مَعْلَماً للمستوي

- النقطة م هي مبدأ المعلم (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ي}}$)

المحور المعيّن بالنقطة م وبالشعاع $\overrightarrow{\text{و}}$

هو **محور الفواصل**

المحور المعيّن بالنقطة م وبالشعاع $\overrightarrow{\text{ي}}$

هو **محور التراتيب**

- ليكن (م ، $\overrightarrow{\text{م أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ب}}$) معلماً للمستوي .

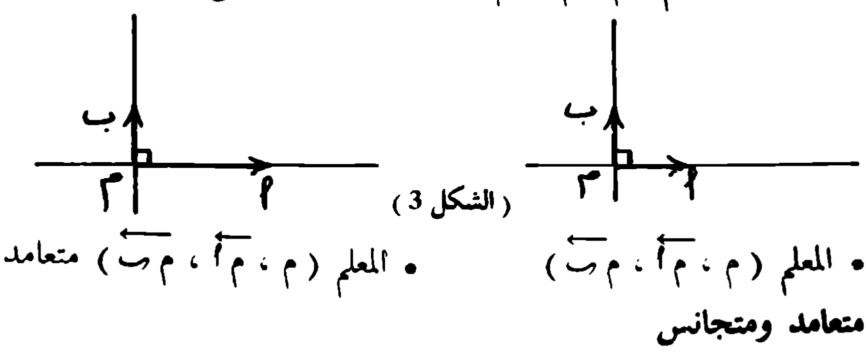
إذا كان المستقيمان (م أ) و (م ب) متعامدين نقول إن المعلم (م ، $\overrightarrow{\text{م أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ب}}$) **متعامد**

(الشكل 2)

إذا كان المستقيمان (م أ) و (م ب) متعامدين وكان

$\|\overrightarrow{\text{م أ}}\| = \|\overrightarrow{\text{م ب}}\| = 1$

نقول إن المعلم (م ، $\overrightarrow{\text{م أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ب}}$) **متعامد ومتجانس**



(الشكل 3)

- المعلم (م ، $\overrightarrow{\text{م أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ب}}$) **متعامد ومتجانس**

- المعلم (م ، $\overrightarrow{\text{م أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ب}}$) متعامد

2.2 ـ إحداثيا نقطة :

(م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) معلم للمستوي ، ن نقطة من المستوي .
نسمي إحداثيي النقطة ن في المعلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) المركبتين السلميتين (س ، ع) للشعاع $\vec{من}$ بالنسبة الى الأساس ($\vec{و}$ ، $\vec{ى}$)

وبعبارة أخرى :
إحداثيا النقطة ن في المعلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) هما العددان الحقيقيان س ، ع حيث : $\overrightarrow{\text{من}}$ = س $\vec{و}$ + ع $\vec{ي}$

الترميز :

العدد س هو **فاصلة** النقطة ن في المعلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$)
العدد ع هو **ترتيب** النقطة ن في المعلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$)

3.2 ـ نتائج :

(م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) معلم للمستوي

- **المستوي والمجموعة ح × ح**

نستنتج مما سبق ما يلي :
إذا أعطيت نقطة ن من المستوي فإنه توجد ثنائية وحيدة (س ، ع) من ح × ح بحيث يكون (س ، ع) إحداثيي النقطة ن .
كذلك إذا أعطيت ثنائية (س ، ع) من ح × ح فإنه توجد نقطة وحيدة ن من المستوي إحداثياها هما (س ، ع)
إذن : **يوجد تطبيق تقابلي للمستوي في المجموعة ح × ح يرفق بكل نقطة ن إحداثييها** (س ، ع)

- **مركبتا الشعاع $\overrightarrow{ن ن'}$**

إذا كان (س ، ع) إحداثيي النقطة ن وكان **(س' ، ع') إحداثيي** النقطة ن' تكون مركبتا الشعاع $\overrightarrow{ن ن'}$ هما $\begin{pmatrix} س' - س \\ ع' - ع \end{pmatrix}$

- **إحداثيا منتصف القطعة** [ن ن']

إحداثيا منتصف القطعة [ن ن'] هما $\left(\frac{س + س'}{2} ، \frac{ع + ع'}{2} \right)$

- **تغيير المعلم بدون تغيير الأساس**

$م_0$ نقطة من المستوي إحداثياها في المعلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) **هما** ($س_0$ ، $ع_0$)

ن نقطة من المستوي إحداثياها في المعلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) **هما** (س ، ع)

وإحداثياها في المعلم ($م_0$ ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) هما (س' ، ع')

من المساواة $\overrightarrow{م ن} = \overrightarrow{م م_0} + \overrightarrow{م_0 ن}$ نستنتج

$$س = س_0 + س'$$
و
$$ع = ع_0 + ع'$$

4.2 ـ تمرين محلول :

يُنسب المستوي إلى معلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$)

(س'س) هو حامل محور الفواصل ؛ (ع'ع) **حامل محور التراتيب**

ا ، ب ، ح ثلاث نقط من المستوي حيث :

ا(1 ، 2) ، ب(3 ، 6) ، ح(0 ، 4)

1) أثبت أن النقط م ، ا ، ب على استقامة واحدة

2) أوجد إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (ا ح) و (س'س)

3) أوجد إحداثيي النقطة د بحيث يكون ا ب ح د **متوازي أضلاع**

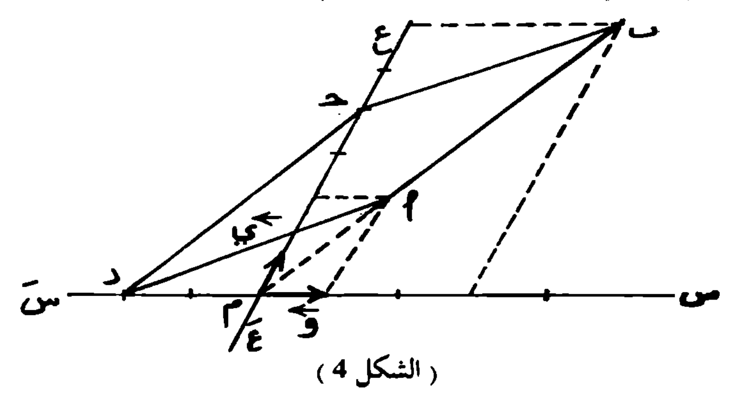
4) أوجد إحداثيي النقطة ب في المعلم **(ح ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$)**

1) تكون النقط م ، أ ، ب على استقامة واحدة إذا وفقط إذا توازى الشعاعان $\overleftarrow{مأ}$ ، $\overleftarrow{مب}$

لدينا : $\overleftarrow{مأ} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ؛ $\overleftarrow{مب} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

من الواضح أن : $\overleftarrow{مب} = 3\,\overleftarrow{مأ}$

إذن $\overleftarrow{مأ}$ و $\overleftarrow{مب}$ متوازيان والنقط م ، أ ، ب على استقامة واحدة



(الشكل 4)

2. ليكن (س ، ع) إحداثيي هـ نقطة تقاطع المستقيمين (أ حـ) و (سَ س)

لدينا ع = 0 لأن هـ تنتمي الى (سَ س)

بما أن النقط أ ، حـ ، هـ على استقامة واحدة فإن الشعاعين $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ متوازيان وهذا يعني أن محدد الثنائية ($\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$) معدوم

لدينا : $\overleftarrow{أحـ} \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 4 - 2 \end{pmatrix}$ أي $\overleftarrow{أحـ} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overleftarrow{أهـ} \begin{pmatrix} س - 1 \\ 0 - 2 \end{pmatrix}$ أي $\overleftarrow{أهـ} \begin{pmatrix} س - 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1 & س - 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2(س - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow س = 2$$

إذن إحداثيا النقطة هـ هما (2 ، 0)

3. ليكن (س ، ع) إحداثيي النقطة ء
بما أن ا ب حـ ء متوازي أضلاع فإن $\overleftarrow{اب} = \overleftarrow{ءحـ}$

لدينا :

$$\overleftarrow{اب} \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-6 \end{pmatrix} \quad \text{أي} \quad \overleftarrow{اب} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overleftarrow{ءحـ} \begin{pmatrix} 0-\text{س} \\ 4-\text{ع} \end{pmatrix} \quad \text{أي} \quad \overleftarrow{ءحـ} \begin{pmatrix} -\text{س} \\ 4-\text{ع} \end{pmatrix}$$

- $\overleftarrow{اب} = \overleftarrow{ءحـ} \Leftrightarrow$ (2 = − س) و (4 = 4 − ع)
$\Leftrightarrow$ (س = − 2) و (ع = 0)
إذن إحداثيا النقطة ء هما (− 2 ، 0)

4. إحداثيا النقطة ب في المعلم (حـ ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) هما العددان الحقيقيان
س′ ، ع′ حيث :
$\overleftarrow{حـب} = \text{س}'\overleftarrow{و} + \text{ع}'\overleftarrow{ي}$
لدينا : $\overleftarrow{حـب} = \overleftarrow{مب} - \overleftarrow{محـ}$

$$= (3\overleftarrow{و} + 6\overleftarrow{ي}) - (0\overleftarrow{و} + 4\overleftarrow{ي})$$
$$= 3\overleftarrow{و} + 2\overleftarrow{ي}$$

إذن إحداثيا النقطة ب في المعلم (حـ ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) هما (3 ، 2)

18 مرجح نقطتين ـ مرجح ثلاث نقط

1. مرجح نقطتين :

1.1. تمرين تمهيدي :

ا ، ب نقطتان من المستوى ، α ، β عددان حقيقيان هل توجد نقطة هـ من المستوى تحقق المساواة

$$\alpha\,\overleftarrow{\text{ها}} + \beta\,.\,\overleftarrow{\text{هب}} = \overleftarrow{0}$$

لدينا $\alpha\,\overleftarrow{\text{ها}} + \beta\,\overleftarrow{\text{هب}} = \overleftarrow{0} \Leftrightarrow \alpha\,\overleftarrow{\text{ها}} + \beta\,(\overleftarrow{\text{ها}} + \overleftarrow{\text{اب}}) = \overleftarrow{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\,\overleftarrow{\text{ها}}$
$+ \beta\,\overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)\,\overleftarrow{\text{اه}} = \beta\,\overleftarrow{\text{اب}}$ (1)

المناقشة :

1) إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فإن المساواة (1) تكتب $0\,\overleftarrow{\text{اه}} = \beta\,\overleftarrow{\text{اب}}$

- فإذا كان $\beta\,\overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{0}$ فإن كل نقطة من المستوى تحقق المساواة (1)
- إذا كان $\beta\,\overleftarrow{\text{اب}} \neq \overleftarrow{0}$ فإنه لا يوجد أية نقطة من المستوى تحقق المساواة (1)

2) إذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ فإن المساواة (1) تكتب :

$$\overleftarrow{\text{اه}} = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)\overleftarrow{\text{اب}}$$

الشعاع $\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)\overleftarrow{\text{اب}}$ ثابت والنقطة ا ثابتة .

إذن توجد نقطة وحيدة هـ تحقق المساواة

$$\overleftarrow{\text{اه}} = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)\overleftarrow{\text{اب}}$$

وبالتالي تحقق المساواة $\alpha\,\overleftarrow{\text{ها}} + \beta\,\overleftarrow{\text{هب}} = \overleftarrow{0}$

1. 2 . نظرية وتعريف :

نظرية وتعريف :

إذا كانت أ ، ب نقطتين من المستوى وكان α ، β عددين حقيقيين حيث $\alpha + \beta \neq 0$
فإنه توجد نقطة وحيدة هـ من المستوى تحقق المساواة

$$\alpha\, \overrightarrow{\text{هـأ}} + \beta\, \overrightarrow{\text{هـب}} = \vec{0}$$

النقطة هـ تسمى مرجح النقطتين أ وَ ب المرفقتين بالمعاملين α ، β على الترتيب

نسمي أيضا النقطة هـ مركز المسافتين المتناسبتين للنقطتين أ و ب المرفقين بالمعاملين α وَ β على الترتيب

أمثلة :

1) مرجح النقطتين أ وَ ب المرفقتين بالمعاملين (2) و (-3) على الترتيب هو النقطة هـ المعرفة كما يلي :

$$2\,\overrightarrow{\text{هـأ}} - 3\,\overrightarrow{\text{هـب}} = \vec{0} \quad (1)$$

المساواة (1) تكتب $2\,\overrightarrow{\text{هـأ}} - 3\,(\overrightarrow{\text{هـأ}} + \overrightarrow{\text{أب}}) = \vec{0}$ أي $\overrightarrow{\text{أهـ}} = 3\,\overrightarrow{\text{أب}}$

2) مرجح النقطتين أ وَ ب المرفقتين بالمعاملين 2 وَ 3 على الترتيب هو النقطة هـ المعرفة كما يلي :

$$2\,\overrightarrow{\text{هـأ}} + 3\,\overrightarrow{\text{هـب}} = \vec{0} \quad \text{لدينا}$$

$$2\,\overrightarrow{\text{هـأ}} + 3\,\overrightarrow{\text{هـب}} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{\text{هـأ}} + 3\,(\overrightarrow{\text{هـأ}} + \overrightarrow{\text{أب}}) = \vec{0} \Leftrightarrow 5\,\overrightarrow{\text{هـأ}} + 3\,\overrightarrow{\text{أب}} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{أهـ}} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{\text{أب}}$$

3) مرجح النقطتين أ وَ ب المرفقتين بنفس المعامل غير المعدوم α هو النقطة هـ المعرفه كما يلي :

$$\alpha\,\overrightarrow{\text{هـأ}} + \alpha\,\overrightarrow{\text{هـب}} = \vec{0}$$

لدينا $\alpha\,\overrightarrow{\text{هـأ}} + \alpha\,\overrightarrow{\text{هـب}} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\,(\overrightarrow{\text{هـأ}} + \overrightarrow{\text{هـب}}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{هـأ}} + \overrightarrow{\text{هـب}} = \vec{0}$ لأن $\alpha \neq 0$

هذه النقطة هـ هي منتصف القطعة [أ ب]

1. 3. خواص مرجح نقطتين

الخاصة 1

إذا كانت أ ، ب نقطتين متمايزتين فإن المساواة

$$\alpha\,\overrightarrow{\text{هـ أ}} + \beta\,\overrightarrow{\text{هـ ب}} = \vec{0}$$

تعني أن النقط الثلاث أ ، ب ، هـ على استقامة واحدة

إذن : **مرجح النقطتين المتمايزتين أ ، ب ينتمي إلى المستقيم (أ ب)**

الخاصة 2

أ ، ب ، هـ ثلاث نقط من المستوى

α ، β عددان حقيقيان حيث $\alpha + \beta \neq 0$

مهما كانت النقطة د من المستوى لدينا

$$\alpha\,\overrightarrow{\text{هـ أ}} + \beta\,\overrightarrow{\text{هـ ب}} = \vec{0} \Longleftrightarrow \alpha\,(\overrightarrow{\text{هـ د}} + \overrightarrow{\text{د أ}}) + \beta\,(\overrightarrow{\text{هـ د}} + \overrightarrow{\text{د ب}}) = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow (\alpha + \beta)\,\overrightarrow{\text{هـ د}} + (\alpha\,\overrightarrow{\text{د أ}} + \beta\,\overrightarrow{\text{د ب}}) = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow (\alpha + \beta)\,\overrightarrow{\text{د هـ}} = \alpha\,\overrightarrow{\text{د أ}} + \beta\,\overrightarrow{\text{د ب}}$$

إذن : **إذا كانت د نقطة كيفية من المستوى ، تكون النقطة هـ مرجح النقطتين أ ، ب المرفوقتين بالمعاملين α ، β على الترتيب إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :**

$$\alpha\,\overrightarrow{\text{د أ}} + \beta\,\overrightarrow{\text{د ب}} = (\alpha + \beta)\,\overrightarrow{\text{د هـ}}$$

الخاصة 3 :

ليكن (م ، $\vec{\text{و}}$ ، $\vec{\text{ى}}$) معلما للمستوى ، ($\text{س}_{\text{أ}}$ ، $\text{ع}_{\text{أ}}$) إحداثيي النقطة أ

($\text{س}_{\text{ب}}$ ، $\text{ع}_{\text{ب}}$) إحداثيي النقطة ب

($\text{س}_{\text{هـ}}$ ، $\text{ع}_{\text{هـ}}$) إحداثيي النقطة هـ

المساواة $\alpha\,\overrightarrow{\text{د أ}} + \beta\,\overrightarrow{\text{د ب}} = (\alpha + \beta)\,\overrightarrow{\text{د هـ}}$ تكتب من أجل د = م كما يلي :

$$\alpha\,\overrightarrow{\text{م أ}} + \beta\,\overrightarrow{\text{م ب}} = (\alpha + \beta)\,\overrightarrow{\text{م هـ}}$$

أي : $\overrightarrow{\text{م هـ}} = \dfrac{1}{\alpha + \beta}\,(\alpha\,\overrightarrow{\text{م أ}} + \beta\,\overrightarrow{\text{م ب}})$

ومنه نستنتج :

$$\text{س}_{\text{هـ}} = \frac{\alpha\,\text{س}_{\text{أ}} + \beta\,\text{س}_{\text{ب}}}{\alpha + \beta} \quad \text{و} \quad \text{ع}_{\text{هـ}} = \frac{\alpha\,\text{ع}_{\text{أ}} + \beta\,\text{ع}_{\text{ب}}}{\alpha + \beta}$$

2 . مرجح ثلاث نقط

1.2 . تعريف :

إذا كانت ا ، ب ، حـ ثلاث نقط من المستوى وكانت α ، β ، γ ثلاث أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

فبإتباع الطريقة المستعملة في الفقرة (1 . 1) نحصل على النتيجة التالية :

توجد نقطة وحيدة هـ تحقق المساواة

$$\alpha\, \overleftarrow{هـا} + \beta\, \overleftarrow{هـب} + \gamma\, \overleftarrow{هـحـ} = \overleftarrow{0}$$

تسمى هذه النقطة **مرجح النقط** ا . ب . حـ **المرفقة بالمعاملات** α . β . γ **على الترتيب**

نقول أيضا أن هذه النقطة هـ مركز المسافات المتناسبة للنقط ا . ب . حـ المرفقة بالمعاملات α ، β ، γ على الترتيب

تعريف :

نسمي مرجح النقط ا . ب . حـ المرفقة بالمعاملات α ، β ، γ على الترتيب ، حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ النقطة هـ التي تحقق المساواة $\alpha\, \overleftarrow{هـا} + \beta\, \overleftarrow{هـب} + \gamma\, \overleftarrow{هـحـ} = \overleftarrow{0}$

2.2 . خواص مرجح ثلاث نقط :

الخاصة 1

إذا كانت ا . ب . حـ ثلاث نقط من المستوى وكانت α ، β ، γ ثلاثة أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

فبإتباع الطريقة المستعملة في الفقرة (1 . 3) نحصل على النتيجة التالية :

إذا كانت د نقطة كيفية من المستوى ، تكون النقطة هـ مرجح النقط ا . ب . حـ المرفقة بالمعاملات α . β . γ على الترتيب إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$\alpha\, \overleftarrow{دا} + \beta\, \overleftarrow{دب} + \gamma\, \overleftarrow{دحـ} = (\alpha + \beta + \gamma)\, \overleftarrow{دهـ}$$

الخلاصة 2

ليكن (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) معلما للمستوى

نسمي ($س_1$ ، $ع_1$) إحداثيي النقطة ا .

($س_ب$ ، $ع_ب$) إحداثيي النقطة ب
($س_ح$ ، $ع_ح$) إحداثيي النقطة ح
($س_ه$ ، $ع_ه$) إحداثيي النقطة ه

المساواة $\alpha\, \overleftarrow{ن أ} + \beta\, \overleftarrow{ن ب} + \gamma\, \overleftarrow{ن ح} = (\alpha + \beta + \gamma)\, \overleftarrow{ن ه}$ تكتب من أجل ن = م كما يلي :

$$\alpha\, \overleftarrow{م أ} + \beta\, \overleftarrow{م ب} + \gamma\, \overleftarrow{م ح} = (\alpha + \beta + \gamma)\, \overleftarrow{م ه}$$

أي : $\overleftarrow{م ه} = \dfrac{1}{\alpha + \beta + \gamma} (\alpha\, \overleftarrow{م أ} + \beta\, \overleftarrow{م ب} + \gamma\, \overleftarrow{م ح})$.

ومنه نستنتج

$$س_ه = \frac{\alpha\, س_أ + \beta\, س_ب + \gamma\, س_ح}{\alpha + \beta + \gamma} \qquad ع_ه = \frac{\alpha\, ع_أ + \beta\, ع_ب + \gamma\, ع_ح}{\alpha + \beta + \gamma}$$

الخاصة 3

إذا كانت النقطة ه مرجح النقط أ ، ب ، ح المرفقة بالمعاملات α ، β ، γ على الترتيب يكون لدينا :

$$\alpha\, \overleftarrow{ه أ} + \beta\, \overleftarrow{ه ب} + \gamma\, \overleftarrow{ه ح} = \overleftarrow{0} \quad (1)$$

إذا كانت 'ه مرجح النقطتين أ ، ب المرفقتين بالمعاملين α وَ β على الترتيب يكون لدينا :

$$\alpha\, \overleftarrow{ه أ} + \beta\, \overleftarrow{ه ب} = (\alpha + \beta)\, \overleftarrow{ه ه'} \quad (2)$$

من المساواتين (1) وَ (2) نستنتج

$$(\alpha + \beta)\, \overleftarrow{ه ه'} + \gamma\, \overleftarrow{ه ح} = \overleftarrow{0}$$

وهذه المساواة الأخيرة تعني أن النقطة ه هي مرجح النقطتين 'ه ، ح المرفقتين بالمعاملين ($\alpha + \beta$) ، γ على الترتيب

إذن :

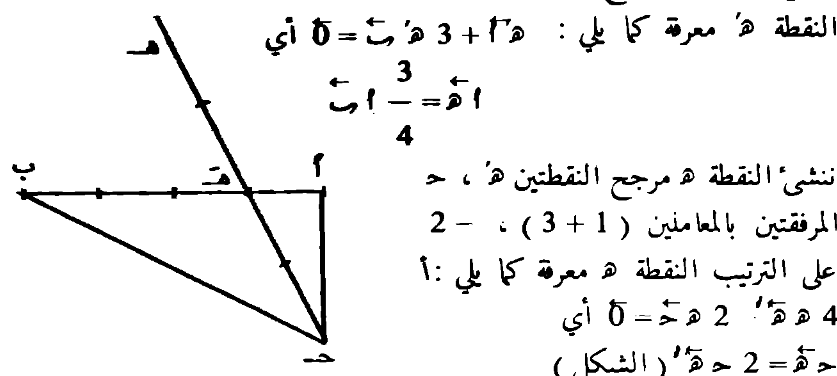
لا يتغير مرجح ثلاث نقط إذا أبدلنا نقطتين منها بمرجحها بشرط أن نرفق بهذا المرجح مجموع المعاملين المرفقين لهاتين النقطتين

مثلا : إذا أردنا إنشاء مرجح النقط ا ، ب ، حـ المرفقة بالمعاملات 1 ، 3 ، − 2 على الترتيب ، يمكننا أن نتبع الطريقة التالية

أولا : ننشئ النقطة هـ' مرجح النقطتين ا ، ب المرفقتين بالمعاملين 1 ، 3 على الترتيب .

النقطة هـ' معرفة كما يلي : $\overrightarrow{هـ'ا} + 3\,\overrightarrow{هـ'ب} = \vec{0}$ أي

$$\overrightarrow{اهـ'} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{اب}$$



ثانيا : ننشئ النقطة هـ مرجح النقطتين هـ' ، حـ المرفقتين بالمعاملين (1 + 3) ، − 2 على الترتيب النقطة هـ معرفة كما يلي :أ

$4\,\overrightarrow{هـهـ'} \quad 2\,\overrightarrow{هـحـ} = \vec{0}$ أي

$\overrightarrow{حـهـ} = 2\,\overrightarrow{حـهـ'}$ (الشكل)

النقطة هـ التي وجدناها هنا هي مرجح النقط ا ، ب ، حـ المرفقة بالمعاملات 1 ، 3 ، −2 على الترتيب

3 . 2 . مركز ثقل المثلث :

ليكن ا ب حـ مثلثا و α عددا حقيقيا غير معدوم مرجح النقط ا ، ب ، حـ المرفقة بنفس المعامل α هو النقطة هـ المعرفة كما يلي : $\alpha\,\overrightarrow{هـا} + \alpha\,\overrightarrow{هـب} + \alpha\,\overrightarrow{هـحـ} = \vec{0}$ أي

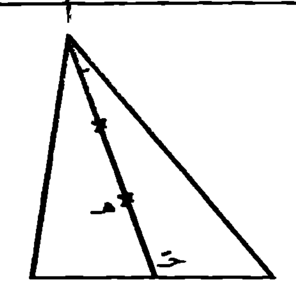
$$\overrightarrow{هـا} + \overrightarrow{هـب} + \overrightarrow{هـحـ} = \vec{0}$$

لتعيين النقطة هـ يمكن أخذ النقطتين ب ، حـ وإبدالها بمرجحها وهو النقطة ا' منتصف القطعة [ب حـ] تكون عندئذ النقطة هـ مرجح النقطتين ا' و ا المرفوقتين بالمعاملين 2 ، 1 على الترتيب وبالتالي النقطة هـ تنتمي إلى المتوسط (اا') للمثلث ا ب حـ

وإذا أخذنا النقطتين ا وَ حـ وأبدلناهما بمرجحها ب' نجد أن النقطة هـ تنتمي إلى المتوسط (ب ، ب') للمثلث ا ب حـ إذن : النقطة هـ هي نقطة تقاطع المتوسطين (اا') وَ (ب ب') وبالتالي فهي مركز ثقل المثلث ا ب حـ ومنه النتيجة التالية

مركز ثقل المثلث ا ب حـ هو النقطة هـ التي تحقق المساواة $\overrightarrow{هـا} + \overrightarrow{هـب} + \overrightarrow{هـحـ} = \vec{0}$

ملاحظة :



رأينا في هذه الفقرة أن النقطة هـ هي مرجح النقطتين ا ، ا' المرفقتين بالمعاملين 1 ، 2 على الترتيب فهي تحقق المساواة

$\overrightarrow{هـا} + 2\,\overrightarrow{هـا'} = \vec{0}$ أي $\overrightarrow{اهـ} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{اا'}$

19 المستقيم في الهندسة المستوية التحليلية

1 ـ التمثيل الوسيطي الشعاعي لمستقيم :

يعرف المستقيم بنقطة ومنحى أو بنقطتين متمايزتين

1.1 ـ ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة ن_0 ويوازي الشعاع غير المعدوم $\overleftarrow{\text{ش}}$.

تكون نقطة ن من المستوي نقطة من المستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ موازيا للشعاع $\overleftarrow{\text{ن}_0\text{ن}}$.

أي :

$$\text{ن} \in (\Delta) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \text{ح} : \overleftarrow{\text{ن}_0\text{ن}} = \lambda \overleftarrow{\text{ش}} .$$

2.1 ـ ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطتين المتمايزتين ن_0 و ن_1 .

تكون نقطة ن من المستوي نقطة من المستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overleftarrow{\text{ن}_0\text{ن}_1}$ و $\overleftarrow{\text{ن}_0\text{ن}}$ (أو $\overleftarrow{\text{ن}_1\text{ن}}$ و $\overleftarrow{\text{ن}_0\text{ن}}$ أو $\overleftarrow{\text{ن}_1\text{ن}}$ و $\overleftarrow{\text{ن}_0\text{ن}_1}$) متوازيين .

أي :

$$\text{ن} \in (\Delta) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \text{ح} : \overleftarrow{\text{ن}_0\text{ن}} = \lambda \overleftarrow{\text{ن}_0\text{ن}_1}$$

2 ـ أشعة التوجيه لمستقيم :

يسمى كل شعاع يوازي المستقيم (Δ) **شعاع توجيه** لهذا المستقيم .

- إذا كان $\overleftarrow{\text{ش}}$ شعاع توجيه لمستقيم (Δ) فإن كل الأشعة $\lambda \overleftarrow{\text{ش}}$ حيث λ عدد حقيقي غير معدوم ، وهذه الأشعة فقط ، هي أشعة توجيه للمستقيم (Δ) .
- إذا كان $\overleftarrow{\text{ش}}$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) فإنه أيضا شعاع توجيه لكل مستقيم يوازي (Δ) .
- في المستوي المنسوب إلى معلم $(\text{م} ، \overleftarrow{\text{و}} ، \overleftarrow{\text{ي}})$ تسمى مركبتا شعاع التوجيه بالنسبة إلى الأساس $(\overleftarrow{\text{و}} ، \overleftarrow{\text{ي}})$ **وسيطي توجيه المستقيم**

3 ـ التمثيل الوسيطي لمستقيم :

المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\vec{\text{و}}$ ، $\vec{\text{ي}}$) .

1.3 ـ ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة ن$_0$ (س$_0$ ، ع$_0$)

ويوازي الشعاع $\vec{\text{ش}}$ $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

إذا كانت ن (س ، ع) نقطة من المستوي فإن :

ن $\in$ (Δ) $\Leftrightarrow$ E $\lambda \in$ ح : $\overrightarrow{\text{ن}_0\text{ن}} = \lambda\, \vec{\text{ش}}$

المعادلة الشعاعية $\overrightarrow{\text{ن}_0\text{ن}} = \lambda\, \vec{\text{ش}}$ تكتب باستعمال الإحداثيات :

$$\begin{cases} \text{س} - \text{س}_0 = \lambda\, \alpha \\ \text{و} \\ \text{ع} - \text{ع}_0 = \lambda\, \beta \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} \text{س} = \text{س}_0 + \lambda\, \alpha \\ \text{و} \\ \text{ع} = \text{ع}_0 + \lambda\, \beta \end{cases}$$

تسمى جملة المعادلتين السابقتين **تمثيلا وسيطيا للمستقيم** (Δ) والوسيط هنا هو العدد الحقيقي λ .

- تقابل كلُّ قيمة للوسيط الحقيقي λ نقطةً من المستقيم (Δ) وتقابل كلُّ نقطة من المستقيم (Δ) قيمةً للوسيط الحقيقي λ .

2.3 ـ إذا عُرِّف المستقيم (Δ) بالنقطتين ن$_0$ (س$_0$ ، ع$_0$) و ن$_1$ (س$_1$ ، ع$_1$) يكون الشعاع $\overrightarrow{\text{ن}_0\text{ن}_1}$ هو شعاع توجيهٍ للمستقيم (Δ) .

ومنه التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} \text{س} = \text{س}_0 + \lambda\, (\text{س}_1 - \text{س}_0) \\ \text{و} \\ \text{ع} = \text{ع}_0 + \lambda\, (\text{ع}_1 - \text{ع}_0) \end{cases}$$

3.3 ـــ تمرين محلول ـــــــــــــــ

> ﺍ نقطة إحداثياها $(-2 ، 1)$ و $\overleftarrow{ش}$ شعاع مركبتاه $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
>
> أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل ﺍ ويوازي $\overleftarrow{ش}$.
>
> هل النقطتان ل $(-8 ، 3)$ وَ ﻫ $(1 ، 2)$ تنتميان إلى (Δ) ؟

• لتكن م (س ، ع) نقطة من المستوي .

م $\in (\Delta) \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overleftarrow{ﺍم} = \lambda \overleftarrow{ش}$.

$$\overleftarrow{ﺍم} = \lambda \overleftarrow{ش} \Longleftrightarrow \begin{cases} س + 2 = 3\lambda \\ وَ \\ ع - 1 = -\lambda \end{cases}$$

ومنه التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} س = 3\lambda - 2 \\ وَ \\ ع = -\lambda + 1 \end{cases}$$

• ل $\in (\Delta) \Longleftrightarrow \left[\exists \lambda \in \mathbb{R} : (-8 = 3\lambda - 2) \wedge (3 = -\lambda + 1) \right]$

$\Longleftrightarrow \left[\exists \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda = -2) \wedge (\lambda = -2) \right]$

بما أن القضية $(\exists \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda = -2) \wedge (\lambda = -2))$ صحيحة فإن النقطة ل تنتمي إلى (Δ) .

ﻫ $\in (\Delta) \Longleftrightarrow \left[\exists \lambda \in \mathbb{R} : (1 = 3\lambda - 2) \wedge (2 = -\lambda + 1) \right]$

$$\Leftrightarrow \left[\ \exists \lambda \in \text{ح} : (\lambda = 1) \wedge (\lambda = -1)\ \right]$$

بما أن القضية $\left[\ \exists \lambda \in \text{ح} : (\lambda = 1) \wedge (\lambda = -1)\ \right]$

خاطئة فإن النقطة ه لا تنتمي إلى (Δ) .

4 ـ المعادلة الديكارتية لمستقيم :

المستوي منسوب إلى معلم $(\text{م} ، \vec{\text{و}} ، \vec{\text{ي}})$.

1.4 ـ معادلة مستقيم يشمل نقطة معلومة ويوازي شعاعا معلوما :

ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $\text{ه}_0(\text{س}_0 ، \text{ع}_0)$ ويوازي الشعاع غير المعدوم $\vec{\text{ش}}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$

إذا كانت ه نقطة من المستوي إحداثياها (س ، ع) فإن :

$$\text{ه} \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{ه}_0\text{ه}} \parallel \vec{\text{ش}}$$

مركبتا $\overrightarrow{\text{ه}_0\text{ه}}$ هما $\begin{pmatrix}\text{س} - \text{س}_0 \\ \text{ع} - \text{ع}_0\end{pmatrix}$ ومركبتا $\vec{\text{ش}}$ هما $\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$

يتوازى الشعاعان $\overrightarrow{\text{ه}_0\text{ه}}$ و $\vec{\text{ش}}$ إذا وفقط إذا كان محددهما معدوماً :

$$\overrightarrow{\text{ه}_0\text{ه}} \parallel \vec{\text{ش}} \Leftrightarrow \begin{vmatrix}\text{س} - \text{س}_0 & \alpha \\ \text{ع} - \text{ع}_0 & \beta\end{vmatrix} = 0$$

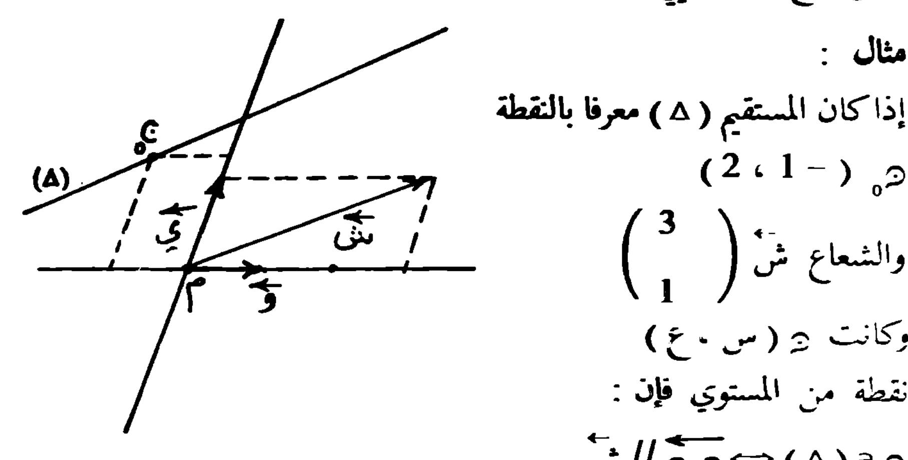
أي : $\overrightarrow{\text{ه}_0\text{ه}} \parallel \vec{\text{ش}} \Leftrightarrow (\text{س} - \text{س}_0)\beta - \alpha(\text{ع} - \text{ع}_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \beta\,\text{س} - \alpha\,\text{ع} - \beta\,\text{س}_0 + \alpha\,\text{ع}_0 = 0$$

إذن :

$$\text{ه} \in (\Delta) \Leftrightarrow \beta\,\text{س} - \alpha\,\text{ع} - \beta\,\text{س}_0 + \alpha\,\text{ع}_0 = 0 \quad (1)$$

المعادلة (1) التي هي معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهولين س ، ع تسمى **معادلة ديكارتية للمستقيم** (△) في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .
فهي خاصة مميزة لنقط المستقيم (△) حيث إنها محققة إذا وفقط إذا كان (س ، ع) إحداثيي نقطة من (△).



مثال :

إذا كان المستقيم (△) معرفا بالنقطة

$ن_0$ (− 1 ، 2)

والشعاع $\overleftarrow{ش}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

وكانت ن (س ، ع)

نقطة من المستوي فإن :

$ن \in (\triangle) \Leftrightarrow \overleftarrow{ن_0 ن} \,//\, \overleftarrow{ش}$

مركبتا $\overleftarrow{ن_0 ن}$ هما $\begin{pmatrix} س + 1 \\ ع - 2 \end{pmatrix}$ ومركبتا $\overleftarrow{ش}$ هما $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$ن \in (\triangle) \Leftrightarrow \overleftarrow{ن_0 ن} \,//\, \overleftarrow{ش}$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} س + 1 & 3 \\ ع - 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$ن \in (\triangle) \Leftrightarrow (س + 1) - 3 (ع - 2) = 0$

$\Leftrightarrow س - 3 ع + 7 = 0$

إذن :

س − 3 ع + 7 = 0 هي معادلة للمستقيم (△)

2.4 ـ معادلة مستقيم يشمل نقطتين معلومتين :

ليكن (△) المستقيم المعرف بالنقطتين المتمايزتين

$ن_0$ ($س_0$ ، $ع_0$) و $ن_1$ ($س_1$ ، $ع_1$) .

إذا كانت $ه$ نقطة من المستوي إحداثياها (س ، ع) فإن :

$ه \in (\Delta) \Leftrightarrow \overleftarrow{ه_0 ه} // \overleftarrow{ه_0 ه_1}$

مركبتا $\overleftarrow{ه_0 ه}$ هما $\begin{pmatrix} س - س_0 \\ ع - ع_0 \end{pmatrix}$

ومركبتا $\overleftarrow{ه_0 ه_1}$ هما $\begin{pmatrix} س_1 - س_0 \\ ع_1 - ع_0 \end{pmatrix}$

$ه \in (\Delta) \Leftrightarrow \overleftarrow{ه_0 ه} // \overleftarrow{ه_0 ه_1}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} س - س_0 & س_1 - س_0 \\ ع - ع_0 & ع_1 - ع_0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$ (س − $س_0$) ($ع_1$ − $ع_0$) − (ع − $ع_0$) ($س_1$ − $س_0$) = 0 (2)

(2) $\Leftrightarrow$ ($ع_1$ − $ع_0$) س − ($س_1$ − $س_0$) ع − $س_0$ ($ع_1$ − $ع_0$)

+ $ع_0$ ($س_1$ − $س_0$) = 0 ($2'$)

المعادلة ($2'$) هي معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) .

مثال :

إذا كان المستقيم (Δ) معرفا بالنقطتين $ه_0$ (2 ، 1) و $ه_1$ (− 3 ، 5)

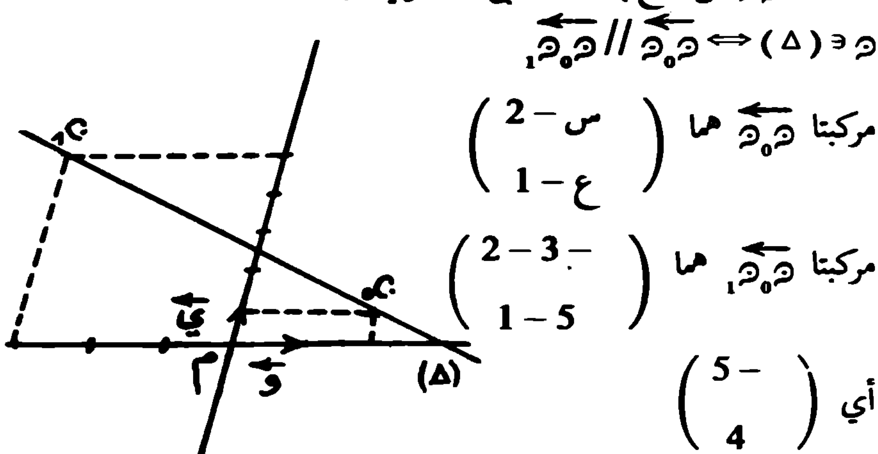
وكانت $ه$ (س ، ع) نقطة من المستوي فإن :

$ه \in (\Delta) \Leftrightarrow \overleftarrow{ه_0 ه} // \overleftarrow{ه_0 ه_1}$

مركبتا $\overleftarrow{ه_0 ه}$ هما $\begin{pmatrix} س - 2 \\ ع - 1 \end{pmatrix}$

مركبتا $\overleftarrow{ه_0 ه_1}$ هما $\begin{pmatrix} -3 - 2 \\ 5 - 1 \end{pmatrix}$

أي $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$



$$\text{م} \in (\Delta) \Leftrightarrow \overleftarrow{\text{م}_0\text{م}} // \overleftarrow{\text{م}_0\text{م}_1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \text{س} - 2 & -5 \\ \text{ع} - 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(\text{س} - 2) + 5(\text{ع} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\text{س} + 5\text{ع} - 13 = 0$$

إذن :

$4\text{س} + 5\text{ع} - 13 = 0$ هي معادلة للمستقيم (Δ)

3.4 ـ الخلاصة :

• لقد حصلنا في الفقرة 1.4 على المعادلة

$$\beta\text{س} - \alpha\text{ع} - \beta\text{س}_0 + \alpha\text{ع}_0 = 0 \quad (1)$$

التي هي معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $\text{م}_0(\text{س}_0 ، \text{ع}_0)$

ويوازي الشعاع غير المعدوم $\overleftarrow{\text{ش}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

إذا وضعنا $\text{أ} = \beta$ ، $\text{ب} = -\alpha$ ، $\text{حـ} = -\beta\text{س}_0 + \alpha\text{ع}_0$

فالمعادلة (1) تكتب : $\text{أ}\text{س} + \text{ب}\text{ع} + \text{حـ} = 0$

مركبتا $\overleftarrow{\text{ش}}$ الذي هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) هما $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ أي $\begin{pmatrix} -\text{ب} \\ \text{أ} \end{pmatrix}$

وبما أن $\overleftarrow{\text{ش}} \neq \overleftarrow{0}$ فإن $(\text{أ} ، \text{ب}) \neq (0 ، 0)$

• كما حصلنا في الفقرة 4 . 2 على المعادلة :

$(\text{ع}_1 - \text{ع}_0)\text{س} - (\text{س}_1 - \text{س}_0)\text{ع} - \text{س}_0(\text{ع}_1 - \text{ع}_0) + \text{ع}_0(\text{س}_1 - \text{س}_0) = 0 \quad (2')$ التي هي معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطتين المتمايزتين $\text{م}_0(\text{س}_0 ، \text{ع}_0)$ و $\text{م}_1(\text{س}_1 ، \text{ع}_1)$.

إذا وضعنا $\text{أ} = \text{ع}_1 - \text{ع}_0$ ، $\text{ب} = -(\text{س}_1 - \text{س}_0)$

و $\text{حـ} = -\text{س}_0(\text{ع}_1 - \text{ع}_0) + \text{ع}_0(\text{س}_1 - \text{س}_0)$

فالمعادلة $(2')$ تكتب : $\text{أ}\text{س} + \text{ب}\text{ع} + \text{حـ} = 0$

مركبتا $\overleftarrow{هـ_0 هـ_1}$ الذي هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) هما

$$\begin{pmatrix} س_1 - س_0 \\ ع_1 - ع_0 \end{pmatrix} \quad \text{أي} \quad \begin{pmatrix} -ب \\ ا \end{pmatrix}$$

بما أن $\overleftarrow{هـ_0 هـ_1} \neq \overleftarrow{0}$ فإن (ا ، ب) $\neq$ (0 ، 0)

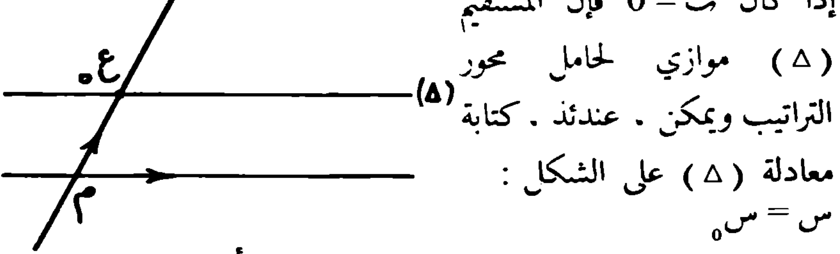
• إذن في كل حالة من الحالتين السابقتين حصلنا على نفس النتيجة وهي :

لكل مستقيم (Δ) من المستوي معادلة من الشكل : ا س + ب ع + جـ = 0 حيث (ا . ب) $\neq$ (0 . 0)

حالات خاصة :

• إذا كان ا = 0 فإن المستقيم (Δ) موازي لحامل محور الفواصل ويمكن عندئذ . كتابة معادلة (Δ) على الشكل $ع = ع_0$

• إذا كان ب = 0 فإن المستقيم (Δ) موازي لحامل محور التراتيب ويمكن . عندئذ . كتابة معادلة (Δ) على الشكل : $س = س_0$



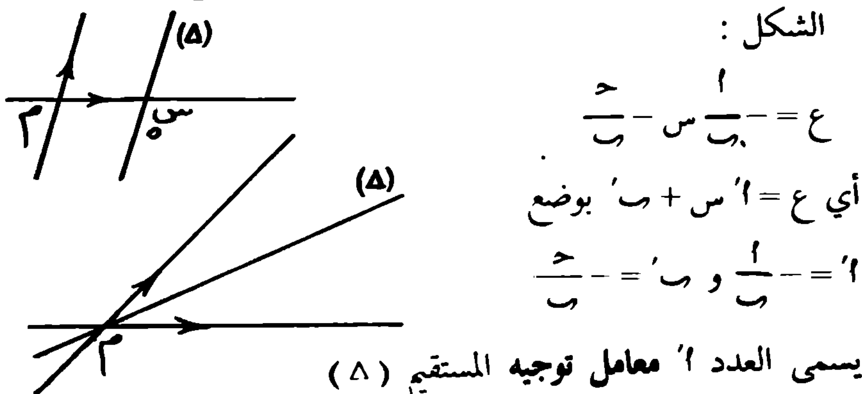
• إذا كان جـ = 0 فإن المستقيم (Δ) يشمل مبدأ المعلم

• إذا كان ب $\neq$ 0 فإنه يمكن كتابة المعادلة ا س + ب ع + جـ = 0 على الشكل :

$$ع = -\frac{ا}{ب} س - \frac{جـ}{ب}$$

أي ع = ا′ س + ب′ بوضع

$$ا' = -\frac{ا}{ب} \quad و \quad ب' = -\frac{جـ}{ب}$$



يسمى العدد ا′ **معامل توجيه** المستقيم (Δ)

5 ـ المسألة العكسية :

لتكن في المستوي المنسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$ المجموعة (ج) للنقط ه التي يحقق إحداثياها (س ، ع) المعادلة :

$أس + ب ع + جـ = 0$ (1) حيث أ ، ب ، جـ ثلاثة أعداد حقيقية معطاة وَ $(أ ، ب) \neq (0 ، 0)$

• المجموعة (ج) ليست خالية لأن المعادلة (1) محققة من أجل كل ثنائية

$$\left(\frac{-ب ع - جـ}{أ} ، ع \right) \quad \text{إذا كان } أ \neq 0$$

ومن أجل كل ثنائية $\left(س ، \frac{-أ س - جـ}{ب} \right)$ إذا كان $ب \neq 0$.

• لتكن $ه_0 (س_0 ، ع_0)$ نقطة من (ج) ولتكن ه (س ، ع) نقطة من المستوي :

بما أن $أ س_0 + ب ع_0 + جـ = 0$ فإن :

$$أس + ب ع + جـ = 0 \Leftrightarrow \left(أس + ب ع + جـ\right) - \left(أ س_0 + ب ع_0 + جـ\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow أ (س - س_0) + ب (ع - ع_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} س - س_0 & -ب \\ ع - ع_0 & أ \end{vmatrix} = 0$$

تدل الكتابة الأخيرة على أن الشعاع $\overleftarrow{ه_0 ه}$ الذي مركبتاه $\begin{pmatrix} س - س_0 \\ ع - ع_0 \end{pmatrix}$ والشعاع $\overleftarrow{ش}$ الذي مركبتاه $\begin{pmatrix} -ب \\ أ \end{pmatrix}$ متوازيان

ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $ه_0$ ويوازي الشعاع $\overleftarrow{ش}$ لدينا :

$$ه \in (ج) \Leftrightarrow أ س + ب ع + جـ = 0$$

$$\Leftrightarrow أ (س - س_0) + ب (ع - ع_0) = 0$$

$\Leftrightarrow \overleftarrow{ن_0 ن} // \overleftarrow{ش}$

$\Leftrightarrow$ ن ∈ (Δ)

ومنه (ج) = (Δ)

إذن :

كل معادلة من الشكل أ س + ب ع + حـ = 0 حيث (أ ، ب) ≠ (0 ، 0) هي معادلة لمستقيم يوازي الشعاع $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} -ب \\ أ \end{pmatrix}$

مثال :

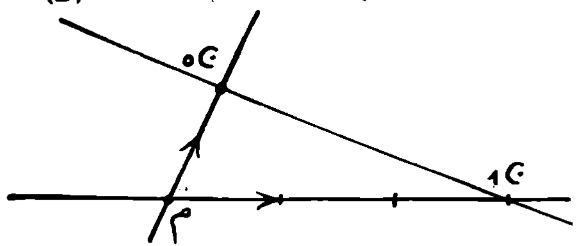
2 س + 3 ع − 6 = 0 هي معادلة مستقيم (Δ) يوازي الشعاع $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

لرسم (Δ) يكفي أخذ نقطتين كيفيتين منه ورسمها مثلا

النقطتان $ن_0$ (0 ، 2) ؛ $ن_1$ (3 ، 0) تنتميان إلى (Δ)

لأن : 2.0 + 3.2 − 6 = 0 وَ 2.3 − 3.0 − 6 = 0

المستقيم الذي يشمل النقطتين $ن_0$ وَ $ن_1$ هو المستقيم (Δ)



ملاحظة :

إذا كان (أ ، ب) = (0 ، 0) فإن المعادلة أ س + ب ع + حـ = 0

تكتب : 0 س + 0 ع + حـ = 0

- إذا كان حـ = 0 فإنها محققة من أجل إحداثيي كل نقطة من المستوي وتكون عندئذ (ج) هي المستوي .
- إذا كان حـ ≠ 0 فإنها غير محققة من أجل إحداثيي كل نقطة من المستوي وتكون عندئذ (ج) هي المجموعة الخالية .

6 ـ توازي مستقيمين :

ليكن في المستوي المنسوب إلى المعلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$ المستقيمان (Δ) و (Δ') اللذان معادلتاهما على الترتيب :

$$ا س + ب ع + حـ = 0$$

$$ا' س + ب' ع + حـ' = 0$$

المستقيم (Δ) يوازي الشعاع $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} -ب \\ ا \end{pmatrix}$

المستقيم (Δ') يوازي الشعاع $\overleftarrow{ش'} \begin{pmatrix} -ب' \\ ا' \end{pmatrix}$

$$(\Delta) // (\Delta') \Leftrightarrow \overleftarrow{ش} // \overleftarrow{ش'}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -ب & -ب' \\ ا & ا' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-ب) ا' - ا (-ب') = 0$$

$$\Leftrightarrow ا ب' - ا' ب = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} ا & ب \\ ا' & ب' \end{vmatrix} = 0$$

ومنه

$$(\Delta) // (\Delta') \Leftrightarrow ا ب' - ا' ب = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} ا & ب \\ ا' & ب' \end{vmatrix} = 0$$

ملاحظة :

رأينا فيما سبق أنه إذا كان $ب \neq 0$ فإن العدد $\left(-\frac{ا}{ب} \right)$ هو معامل توجيه المستقيم (Δ) .

- إذا كان $ب \neq 0$ و $ب' \neq 0$ فإن الشرط $ا ب' - ا' ب = 0$ يكتب : $-\frac{ا}{ب} = -\frac{ا'}{ب'}$ وهذا يعني أن:

المستقيمين (Δ) و (Δ') لهما نفس معامل التوجيه

تمرين محلول

المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .

نعتبر المعادلة : (ط + 3) س − 2 ط ع + 7 ط + 3 = 0 (1)

حيث س و ع هما المجهولان و ط وسيط حقيقي

• بيّن أن (1) هي معادلة ديكارتية لمستقيم ($\Delta_ط$) في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .

• عيّن ط في كل حالة من الحالات التالية :

1) ($\Delta_ط$) يشمل المبدأ م للمعلم

2) الشعاع $\overleftarrow{ش}$ ($\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}$) هو شعاع توجيه للمستقيم ($\Delta_ط$)

3) معامل توجيه ($\Delta_ط$) هو $\left(-\frac{3}{4} \right)$

4) ($\Delta_ط$) يوازي حامل محور الفواصل

5) ($\Delta_ط$) يوازي المستقيم (ه) الذي معادلته :

2 س − ع + 7 = 0

الحل :

• تكون المعادلة (1) معادلة مستقيم إذا وفقط إذا كان

(ط + 3 ، − 2 ط) ≠ (0،0)

وهذا الشرط محقق دوماً لأن العددين (ط + 3) و (− 2 ط)

لا ينعدمان في آن واحد .

بالفعل إذا كان ط + 3 = 0 يكون − 2 ط = 6

وإذا كان − 2 ط = 0 يكون ط + 3 = 3

• 1) م ∈ $\Delta_ط$ ⟸ (ط + 3) × 0 − 2 ط × 0 + 7 ط + 3 = 0

⟸ 7 ط + 3 = 0

⟸ ط = $-\frac{3}{7}$

إذن يشمل $(\Delta_{ط})$ النقطة م إذا وفقط إذا كان $ط = -\frac{3}{7}$

2) نعلم أن الشعاع $\overrightarrow{ش}_{ط} \begin{pmatrix} 2ط \\ ط + 3 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta_{ط})$.

يكون $\overrightarrow{ش}$ شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta_{ط})$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{ش}$ و $\overrightarrow{ش}_{ط}$ متوازيين .

$$\overrightarrow{ش} // \overrightarrow{ش}_{ط} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2ط \\ 5 & ط + 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(ط + 3) - 5(2ط) = 0$$

$$\Leftrightarrow ط = \frac{9}{7}$$

إذن :

يكون $\overrightarrow{ش}$ شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta_{ط})$ إذا وفقط إذا كان $ط = \frac{9}{7}$

3) نعلم أن معامل توجيه المستقيم $(\Delta_{ط})$ هو $\left(\frac{-(ط + 3)}{-(2ط)} \right)$

بفرض أن $2ط \neq 0$.

$$\frac{-(ط + 3)}{-2ط} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{ط + 3}{2ط} + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5ط + 6}{4ط} = 0$$

$$\Leftrightarrow ط = -\frac{6}{5}$$

إذن :

يكون $\left(-\frac{3}{4} \right)$ معامل توجيه للمستقيم $(\Delta_{ط})$ إذا وفقط إذا كان

$ط = -\frac{6}{5}$

4) يكون $(\Delta_{ط})$ موازياً لحامل محور الفواصل إذا وفقط إذا كان

$ط + 3 = 0$ أي $ط = -3$

إذن :

$(\Delta_{ط})$ يوازي حامل محور الفواصل إذا وفقط إذا كان $ط = -3$

5) معادلتا المستقيمين $(\Delta_{ط})$ و (ق) هما :

$(\Delta_{ط})$: $(ط + 3)$ س $- 2$ ط ع $+ 7$ ط $+ 3 = 0$

(ق) : 2 س $-$ ع $+ 7 = 0$

$$(\Delta_{ط}) // (ق) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} ط + 3 & -2ط \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (ط + 3)(-1) - 2(-2ط) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3ط - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow ط = 1$$

إذن :

يكون المستقيمان $(\Delta_{ط})$ و (ق) متوازيين إذا وفقط إذا كان $ط = 1$

تمارين

أشعة المستوي :

1. ا ب حـ د وَ ا ب حـ′ د′ متوازيا أضلاع ضلعهما المشترك [ا ب] .
   بيّن أن الرباعي حـ د د′ حـ′ متوازي أضلاع .
2. ا ب حـ د وَ ا ب′ حـ د′ متوازيا أضلاع قطرهما المشترك [ا حـ] .
   بيّن أن الرباعي ب ب′ د د′ متوازي أضلاع .
3. ا ب حـ مثلث .
   1) أنشيء النقطة ي حيث $\overleftarrow{\text{اي}} = \overleftarrow{\text{اب}} + \overleftarrow{\text{احـ}}$
   2) أنشيء النقط ب′ ؛ حـ′ ؛ د حيث : $\overleftarrow{\text{اب′}} = 2\,\overleftarrow{\text{اب}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{احـ′}} = 2\,\overleftarrow{\text{احـ}}$
   $\overleftarrow{\text{اد}} = \overleftarrow{\text{اب′}} + \overleftarrow{\text{احـ′}}$
   3) قارن بين الشعاعين $\overleftarrow{\text{اد}}$ و $\overleftarrow{\text{اي}}$
4. م ، ا ، ب ثلاث نقط من المستوي .
   أنشيء النقطة حـ حيث $\overleftarrow{\text{ما}} + \overleftarrow{\text{مب}} + \overleftarrow{\text{محـ}} = \overleftarrow{0}$
5. م ، ا ، ب ، حـ أربع نقط من المستوي .
   أنشيء النقطة د حيث : $\overleftarrow{\text{ما}} + \overleftarrow{\text{مب}} + \overleftarrow{\text{محـ}} + \overleftarrow{\text{مد}} = \overleftarrow{0}$
6. (Δ) و (Δ') مستقيمان متقاطعان في النقطة م .
   ا نقطة من المستوي حيث ا $\notin$ (Δ) و ا $\notin$ (Δ')
   أوجد النقطة ب من (Δ) والنقطة ب′ من (Δ') بحيث يكون :
   $\overleftarrow{\text{ما}} = \overleftarrow{\text{مب}} + \overleftarrow{\text{مب′}}$
7. ي ، ا ، ب ، حـ أربع نقط من المستوي .

   أنشيء النقط م ، هـ ، ل ، ك حيث : $\overleftarrow{\text{يم}} = 2\,\overleftarrow{\text{يا}} + \frac{3}{5}\,\overleftarrow{\text{يب}}$ ؛

   $\overleftarrow{\text{يهـ}} = 4\,\overleftarrow{\text{يا}} - 3\,\overleftarrow{\text{يب}}$ ؛ $\overleftarrow{\text{يل}} = \overleftarrow{\text{يا}} + 2\,\overleftarrow{\text{يب}} + \frac{1}{2}\,\overleftarrow{\text{يحـ}}$

   $\overleftarrow{\text{يك}} = 3\,\overleftarrow{\text{يا}} - \frac{3}{2}\,\overleftarrow{\text{يب}} - 2\,\overleftarrow{\text{يحـ}}$.

8. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط من المستوي .

م منتصف القطعة [ا ب] ؛ هـ منتصف القطعة [ا حـ]

بيّن أن : $\overleftarrow{\text{ب حـ}} = 2\,\overleftarrow{\text{م هـ}}$

9. ي منتصف القطعة [ا ب]

1) إذا كانت م نقطة من المستوي ، بيّن أن $\overleftarrow{\text{م ا}} + \overleftarrow{\text{م ب}} = 2\,\overleftarrow{\text{م ي}}$

2) إذا كانت حـ ، د نقطتان من المستوي بيّن أنه :

إذا كان $\overleftarrow{\text{م ا}} + \overleftarrow{\text{م ب}} = \overleftarrow{\text{م حـ}} + \overleftarrow{\text{م د}}$ فإن للقطعتين [ا ب] و [حـ د] نفس المنتصف .

10. ا ، ب ، حـ ، د أربع نقط من المستوي .

بيّن أن : $\overleftarrow{\text{ا ب}} + \overleftarrow{\text{د حـ}} = \overleftarrow{\text{ا حـ}} + \overleftarrow{\text{د ب}}$.

$\overleftarrow{\text{ا حـ}} + \overleftarrow{\text{ب د}} = \overleftarrow{\text{ا د}} + \overleftarrow{\text{ب حـ}}$

11. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط ثابتة من المستوي ؛ ي منتصف القطعة [ا ب]

1) بيّن أنه مهما كانت النقطة هـ من المستوي لدينا :

$\overleftarrow{\text{هـ ا}} + \overleftarrow{\text{هـ ب}} = 2\,\overleftarrow{\text{هـ ي}}$

وأن الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}} = \overleftarrow{\text{هـ ا}} - 2\,\overleftarrow{\text{هـ ب}} + \overleftarrow{\text{هـ حـ}}$ ثابت

2) أوجد النقطة م حيث : $\overleftarrow{\text{م ا}} + 2\,\overleftarrow{\text{م ب}} + \overleftarrow{\text{م حـ}} = \overleftarrow{\text{ا حـ}}$

3) لتكن النقطة ك حيث $\overleftarrow{\text{ا ك}} = \frac{1}{3}\overleftarrow{\text{ا ب}}$. بيّن أن $2\,\overleftarrow{\text{ك ا}} + \overleftarrow{\text{ك ب}} = \overleftarrow{0}$

وأنه مهما كانت النقطة هـ من المستوي فإن :

$2\,\overleftarrow{\text{هـ ا}} + \overleftarrow{\text{هـ ب}} = 3\,\overleftarrow{\text{هـ ك}}$

4) عيّن النقطة م′ بحيث : $2\,\overleftarrow{\text{م}'\text{ا}} + 3\,\overleftarrow{\text{م}'\text{ب}} + \overleftarrow{\text{م}'\text{حـ}} = \overleftarrow{0}$

12. ا ب حـ مثلث .

بيّن أنه يُوجد شعاعان $\overleftarrow{\text{ش}}$ و $\overleftarrow{\text{ش}'}$ بحيث يكون :

$\overleftarrow{\text{ش}} + \overleftarrow{\text{ش}'} = \overleftarrow{\text{ا ب}}$ و $\overleftarrow{\text{ش}} - \overleftarrow{\text{ش}'} = \overleftarrow{\text{ا حـ}}$

13. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط من المستوي ؛ ا′ ، ب′ ، حـ′ منتصفات القطع
[ب حـ] ، [حـ ا] ، [ا ب] على الترتيب .
أوجد ممثلا للشعاع شَ المعرف كما يلي : $\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{اا'} + \overleftarrow{بب'} + \overleftarrow{حـحـ'}$

14. ا ، ب ، حـ ، ء أربع نقط من المستوي .
ا′ ، ب′ ، حـ′ هي نظائر النقط ا ، ب ، حـ على الترتيب بالنسبة إلى النقطة ء
1) بيّن أن : $\overleftarrow{اب} + \overleftarrow{احـ} + \overleftarrow{اب'} + \overleftarrow{احـ'} = 2\overleftarrow{اا'}$
2) بيّن أنه مهما كانت النقطة م من المستوي فإن :
$$\overleftarrow{ما} + \overleftarrow{مب} + \overleftarrow{محـ} + \overleftarrow{ما'} + \overleftarrow{مب'} + \overleftarrow{محـ'} = 6\overleftarrow{مء}$$

15. ا ب حـ مثلث ؛ ا′ منتصف القطعة [ب حـ] .
بيّن أنه إذا كانت م ، ه نقطتين متناظرتين بالنسبة إلى النقطة ا′ فإن :
$$\overleftarrow{ام} + \overleftarrow{اه} = \overleftarrow{اب} + \overleftarrow{احـ}$$
عبّر عن الخاصة العكسية لهذه الخاصة ؛ ثم برهنها .

16. ي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع ا ب حـ ء .
أنشيء النقطتين م ، ه بحيث يكون :
$$\overleftarrow{يم} = \overleftarrow{يا} + \overleftarrow{يب} \quad و \quad \overleftarrow{يه} = \overleftarrow{يحـ} + \overleftarrow{يء}$$
بيّن أن النقطة ي منتصف القطعة [م ه] وأن : $\overleftarrow{يم} = \overleftarrow{ءا} = \overleftarrow{حـب}$

17. ي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع ا ب حـ ء
1) بيّن أن : $\overleftarrow{احـ} + \overleftarrow{بء} = 2\overleftarrow{بحـ}$ وأن : $\overleftarrow{احـ} + \overleftarrow{ءب} = 2\overleftarrow{اب}$
2) م ، ه منتصفا القطعتين [ب حـ] و [حـ ء] على الترتيب .
بيّن أن : $\overleftarrow{ام} + \overleftarrow{اه} = \frac{3}{2}\overleftarrow{احـ}$

18. ا ، ب ، حـ ، ء أربع نقط من المستوي
1) أنشيء النقط م ، ه ، ك ، ل بحيث يكون :
$$\overleftarrow{ام} = \frac{1}{2}\overleftarrow{اء} \text{ ، } \overleftarrow{اب} = 2\overleftarrow{اه} \text{ ؛ } \overleftarrow{كحـ} + \overleftarrow{كء} = \overleftarrow{0} \text{ ؛ } \overleftarrow{بل} = \overleftarrow{لحـ}$$

2) بيّن أن : $\overleftarrow{م ن} = \frac{1}{2}\overleftarrow{د ب}$ وأن $\overleftarrow{د ب} + 2\overleftarrow{ل ك} = \overleftarrow{0}$

3) بيّن أن : م ن ل ك متوازي أضلاع .

19. ا ب ح مثلث . م ، ن ، ك ثلاث نقط معرفة كما يلي :

$\overleftarrow{ا م} = \frac{2}{3}\overleftarrow{ا ح}$ ؛ $\overleftarrow{ا ن} = \frac{1}{2}\overleftarrow{ا ب}$ ؛ $\overleftarrow{ك ب} + \overleftarrow{ك م} = \overleftarrow{0}$

1) بيّن أن : $\overleftarrow{ا م} = 2\overleftarrow{ن ك}$

2) بيّن أن للقطعتين [ك م] و [ن ح] نفس المنتصف

3) أوجد ممثلا للشعاع $\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{ك ن} + \overleftarrow{ك ح}$

ومثلا للشعاع $\overleftarrow{ش'} = \overleftarrow{ك ب} + \overleftarrow{ك ن} + \overleftarrow{ك ح}$

4) بيّن أن : $\overleftarrow{ا ب} + \overleftarrow{ا ح} + \overleftarrow{ك ن} + \overleftarrow{ب ن} = \overleftarrow{ا ن} + \overleftarrow{ا م}$.

20. ا ب ح مثلث . ا' ، ب' ، ح' منتصفات القطع [ب ح] ؛ [ح ا] ؛ [ا ب] على الترتيب

1) بيّن أن للقطعتين [ا' ب'] و [ح ح'] نفس المنتصف ي .

2) ل منتصف القطعة [ا' ح'] . أُحسب الشعاع $\overleftarrow{ل ي}$ بدلالة الشعاع $\overleftarrow{ب ح}$

21. ا ب ح مثلث .

1) أنشيء النقطتين ح ، د بحيث

$\overleftarrow{م ح} = 2\overleftarrow{م ا} + \overleftarrow{م ب}$ ؛ $\overleftarrow{ب د} = 2\overleftarrow{م ا} - \overleftarrow{م ب}$

2) يتقاطع المستقيمان (م ح) و (ا ب) في النقطة ه .

- بيّن أن النقطة ه مركز ثقل المثلث م ب د
- أنشيء النقطة ي بحيث $\overleftarrow{ه ي} = \overleftarrow{ه ب} + \overleftarrow{ه د}$ وأُحسب الشعاع $\overleftarrow{م ي}$ بدلالة الشعاع $\overleftarrow{م ح}$.

3) أنشيء النقطة ك بحيث $\overleftarrow{م ح} + \overleftarrow{ب د} = \overleftarrow{م ك}$.

يتقاطع المستقيمان (م ب) و (ح ك) في النقطة ن .

بيّن أن النقطة ح منتصف القطعة [ك ن] ثم بيّن أن النقط الثلاث د ، ي ، ن على استقامة واحدة .

المحور . المعلم الخطي :

فيما يلي نعتبر مستقيماً (ق) مزوداً بمعلم (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$)

22. أ ، ب ، ح ، ء أربع نقط من (ق) فواصلها على الترتيب : 12 ؛ $-\frac{5}{3}$ ؛ 4,2 ؛ $\frac{11}{5}$.

- أحسب الأقياس الجبرية : $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{بح}}$ ، $\overline{\text{حء}}$ ، $\overline{\text{ءأ}}$
- أوجد فواصل منتصفات القطع [أب] ، [بح] ، [حء] ، [ءأ].

23. أ ، ب ، ح ثلاث نقط من (ق) فواصلها على الترتيب : -5 ، $+3$ ، -1.

- أحسب العدد الحقيقي ك $= \frac{\overline{\text{مب}} . \overline{\text{مح}}}{\overline{\text{أب}} . \overline{\text{أح}}} + \frac{\overline{\text{مح}} . \overline{\text{مأ}}}{\overline{\text{بح}} . \overline{\text{بأ}}} + \frac{\overline{\text{مأ}} . \overline{\text{مب}}}{\overline{\text{حأ}} . \overline{\text{حب}}}$
- نفرض أن فواصل النقط أ ، ب ، ح هي α ، β ، δ على الترتيب .

أحسب العدد ك في هذه الحالة . ماذا تلاحظ ؟

24. أ ، ب ، ح ، ء أربع نقط من (ق) فواصلها على الترتيب :

$(\sqrt{2}-3)$ ؛ $(2\sqrt{2}-1)$ ؛ $(1-3\sqrt{2})$ ؛ $(\sqrt{2}+4)$.

نضع : س $= \overline{\text{ءأ}}^2 + \overline{\text{ءب}}^2 + \overline{\text{ءح}}^2$

ع $= \overline{\text{ءأ}} . \overline{\text{ءب}} + \overline{\text{ءب}} . \overline{\text{ءح}} + \overline{\text{ءح}} . \overline{\text{ءأ}} + \overline{\text{حأ}} . \overline{\text{حب}} + \overline{\text{بح}} . \overline{\text{بأ}} + \overline{\text{أب}} . \overline{\text{أح}}$

أحسب العددين س و ع ثم قارن بينهما .

25. أ ، ب ، ح ، ه أربع نقط من (ق) فواصلها على الترتيب : -1 ؛ 3 ؛ -4 ؛ س

أحسب العدد س حيث :

$\overline{\text{هأ}}^2 + \overline{\text{هب}}^2 + \overline{\text{هح}}^2 - 2\,\overline{\text{هأ}} . \overline{\text{هب}} + \overline{\text{هب}} . \overline{\text{هح}} = 20$

26. أ ، ب ، ح ، د أربع نقط من (ق) فواصلها على الترتيب α ؛ β ؛ γ ؛ δ

أحسب بدلالة α ، β ، γ ، δ العددين الحقيقيين س ، ع :

$\text{س} = \overline{\text{دأ}} . \overline{\text{بح}} + \overline{\text{دب}} . \overline{\text{حأ}} + \overline{\text{دح}} . \overline{\text{أب}}$

$\text{ع} = \overline{\text{دأ}}^2 . \overline{\text{بح}} + \overline{\text{دب}}^2 . \overline{\text{حأ}} + \overline{\text{دح}}^2 . \overline{\text{أب}} + \overline{\text{أب}} . \overline{\text{بح}} . \overline{\text{حأ}}$

27. أ ، ب ، ن ثلاث نقط من (ق) ، ه منتصف القطعة [أب] .

بيّن المساوايات التالية :

1) $\overline{\text{نأ}}^2 + \overline{\text{نب}}^2 = 2 (\overline{\text{هن}}^2 + \overline{\text{هأ}}^2)$

2) $\overline{\text{نأ}}^2 - \overline{\text{نب}}^2 = 2 \overline{\text{أب}} . \overline{\text{هن}}$

3) $\overline{\text{نأ}} . \overline{\text{نب}} = \overline{\text{هن}}^2 - \overline{\text{هأ}}^2$

28. أ ، ب نقطتان من (ق) فاصلتاهما α ، β على الترتيب

1) أحسب فاصلة النقطة أ′ نظيرة النقطة أ بالنسبة إلى النقطة ب

ثم فاصلة النقطة ب′ نظيرة النقطة ب بالنسبة إلى النقطة أ .

2) بيّن أن للقطعتين [أب] و [أ′ب′] نفس المتصف .

29. أ ، ب ، ح ، د ، م′ خمس نقط من (ق) فواصلها على الترتيب :

-7 ؛ 3 ؛ $-\frac{2}{3}$ ؛ 9.2 ؛ -5

1) أحسب فواصل النقط أ ، ب ، ح ، د في المعلم (م′ ، $\overleftarrow{\text{و}}$)

2) أحسب فواصل النقط أ ، ب ، ح ، د ، م ، م′ في المعلم (أ ، $\overleftarrow{\text{أب}}$)

30. أ ، ب ، ح ثلاث نقط من (ق) فواصلها α ، β ، δ على الترتيب .

عين النقطة م′ بحيث يكون مجموع فواصل النقط أ ، ب ، ح في المعلم (م′ ، $\overleftarrow{\text{و}}$) معدوماً .

31. أ ، ب نقطتان من (ق) فاصلتاهما -3 ، 5 على الترتيب

1) أوجد فاصلتي النقطتين ح ، د علما أن :

$\overline{\text{أح}} + \overline{\text{بح}} = 0$ و $2\overline{\text{أد}} + 3\overline{\text{بح}} = 0$

2) أوجد فواصل النقط أ ، ب ، ح ، د في المعلم (ح ، $4\overleftarrow{\text{و}}$)

3) عين النقطة هـ من المستقيم (أب) حيث : $\overline{\text{جـد}} \cdot \overline{\text{جـهـ}} = \overline{\text{جـأ}}^2$

4) تحقق أن : $\frac{\overline{\text{دأ}}}{\overline{\text{دب}}} = -\frac{\overline{\text{هـأ}}}{\overline{\text{هـب}}}$ و $\frac{1}{\overline{\text{أد}}} + \frac{1}{\overline{\text{أهـ}}} = \frac{2}{\overline{\text{أب}}}$

32. أ ، ب نقطتان من (و) فاصلتاهما -3 ، $+5$ على الترتيب .

أُحسب فاصلة النقطة م علماً أن : $\frac{\overline{\text{مأ}}}{\overline{\text{مب}}} = \frac{2}{3}$

33. أ ، ب نقطتان من (و) فاصلتاهما : $2(1-\sqrt{2})$ ، $(5-\sqrt{2})$ على الترتيب

1) أُحسُب فاصلة النقطة م علماً أن $\frac{\overline{\text{مأ}}}{\overline{\text{مب}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

2) أُحسُب فاصلة النقطة م′ علماً أن : $\frac{\overline{\text{م}'\text{أ}}}{\overline{\text{م}'\text{ب}}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

34. أ ، ب نقطتان من (و) فاصلتاهما -1 ، $+2$ على الترتيب

1) أُحسب فاصلتي النقطتين م ، م′ علماً أن :

$\frac{\overline{\text{مأ}}}{\overline{\text{مب}}} = \frac{1}{2}$ و $\frac{\overline{\text{م}'\text{أ}}}{\overline{\text{م}'\text{ب}}} = -\frac{1}{2}$

2) ليكن ي منتصف القطعة [م م′] بين أن : $\frac{\overline{\text{يأ}}}{\overline{\text{يب}}} = \left(\frac{\overline{\text{مأ}}}{\overline{\text{مب}}}\right)^2$

3) أُحسب العدد الحقيقي ك $= \frac{1}{\overline{\text{أم}}} + \frac{1}{\overline{\text{أم}'}} + \frac{1}{\overline{\text{بم}}} + \frac{1}{\overline{\text{بم}'}}$

نظرية طاليس :

35. أ ، ب ، جـ ، د شبه منحرف قاعدتاه [أب] و [جـد] .

يتقاطع قطراه في النقطة ي .

أ′ مسقط النقطة ي على (أب) وفق منحى (أد) .

ب′ مسقط النقطة ي على (ا ب) وفق منحى (ب ح).
بيّن أن للقطعتين [ا ب] و [ا′ ب′] نفس المنتصف

36. ا ب ح مثلث. د نقطة من القطعة]ا ب[؛ هـ نقطة من (ا ح)
حيث ح هـ = ب د و ح ∈]ا هـ[.
المستقيم الذي يشمل د ويوازي (ب ح) يقطع (ا ح) في النقطة ف والمستقيم (ب ح) يقطع (د هـ) في النقطة ك.

أثبت أن : $\frac{\overline{اح}}{\overline{فح}} = \frac{\overline{اب}}{\overline{دب}}$ ، $\frac{\overline{كد}}{\overline{كهـ}} = \frac{\overline{حف}}{\overline{حهـ}}$

ثم استنتج أن : $\frac{كد}{كهـ} = \frac{اح}{اب}$

37. ا ب ح مثلث متساوي الساقين حيث ح ا = ح ب.
نسمي ا′ المسقط العمودي للنقطة ا على (ب ح)، ب′ المسقط العمودي للنقطة ب على (ا ح).

المستقيم العمودي على (ب ح) الذي يشمل النقطة ب يقطع (ح ا) في النقطة د

1) أثبت أن المستقيمين (ا′ ب′)، (ب ا) متوازيان
2) بيّن أن : $\overline{حا}^2 = \overline{حب′} . \overline{حد}$

38. ا ب ح مثلث. ا′ منتصف القطعة [ب ح].
(∆) مستقيم يوازي (ا ا′) ويقطع المستقيمات (ب ح)، (ح ا)، (ا ب) في النقط ا″، ب″، ح″ على الترتيب.

بيّن أن : $\frac{\overline{اح″}}{\overline{اب}} + \frac{\overline{اب″}}{\overline{اح}} = 0$

39. ا ب ح د رباعي محدّب . يتقاطع قطراه [ا ح] و [ب د] في النقطة م .
المستقيم الموازي للمستقيم (ب ح) الذي يشمل م يقطع (ا ب) في النقطة ي .
المستقيم الموازي للمستقيم (ح د) الذي يشمل م يقطع (ا د) في النقطة هـ .
بيّن أن المستقيمين (ي هـ) و (ب د) متوازيان .

40. ا ب ح مثلث . م نقطة من المستقيم (ب ح) .
المستقيم الموازي للمستقيم (ا ب) الذي يشمل النقطة م يقطع (ا ح) في النقطة ن .
المستقيم الموازي للمستقيم (ا ح) الذي يشمل النقطة م يقطع (ا ب) في النقطة ك .

1) قارن بين النسبتين $\frac{\overline{\text{اك}}}{\overline{\text{اب}}}$ و $\frac{\overline{\text{حم}}}{\overline{\text{حب}}}$ ثم قارن بين النسبتين $\frac{\overline{\text{ان}}}{\overline{\text{اح}}}$ و $\frac{\overline{\text{بم}}}{\overline{\text{بح}}}$

2) استنتج أن المستقيمين (ك ن) و (ب ح) متوازيان إذا وفقط إذا كانت النقطة ن منتصف القطعة [ب ح] .

41. ا ب ح مثلث . ك عدد حقيقي يختلف عن 1 .
د ، هـ نقطتان حيث : $\overrightarrow{\text{دا}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{دب}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{هـح}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{هـا}}$.
هـ' مسقط النقطة د على (ا ح) وفق المنحى (ب ح) .
بيّن أن :
1) للقطعتين [ا ح] و [هـ هـ'] نفس المنتصف .
2) منتصفات القطع [ا ب] ، [ا ح] ، [د هـ] على استقامة واحدة

42. ا ب ح مثلث . ا' ، ب' ، ح' منتصفات القطع [ب ح] ، [ح ا] ، [ا ب] على الترتيب .
(Δ) مستقيم يقطع المستقيمات (ا ب) ، (ب ح) ، (ح ا) في النقط م ، ن ، ك على الترتيب .

م′ ، ﻫ′ ، ك′ ثلاث نقط حيث :

$\overrightarrow{حَ م} + \overrightarrow{حَ مَ} = \vec{0}$ ، $\overrightarrow{اَ ﻫ} + \overrightarrow{اَ ﻫَ} = \vec{0}$ ؛ $\overrightarrow{بَ ك} + \overrightarrow{بَ كَ} = \vec{0}$

بيّن أن النقط م′ ، ﻫ′ ، ك′ على استقامة واحدة

43. (ف) و (ف′) مستقيان متقاطعان في النقطة ا .

(Δ) مستقيم يقطع (ف) و (ف′) على الترتيب في النقطتين ب ، ح .

1) ﻫ نقطة من المستقيم (Δ) . ه مسقط النقطة ﻫ على (ف) وفق منحى (ف′) . ي مسقط النقطة ﻫ على (ف′) وفق منحى (ف) .

بيّن أن : $\frac{\overline{اه}}{\overline{اب}} + \frac{\overline{اي}}{\overline{اح}} = 1$

2) بالعكس لتكن ه نقطة من (ف) ، ي نقطة من (ف′) حيث

$\frac{\overline{اه}}{\overline{اب}} + \frac{\overline{اي}}{\overline{اح}} = 1$ ، بيّن أنه إذا كان ا ي ﻫ ه متوازي أضلاع فإن النقطة ﻫ تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

44. ا ب ح مثلث . (Δ) مستقيم يقطع المستقيات (ب ح) ، (ا ح) ، (ا ب) في النقط ا′ ، ب′ ، ح′ على الترتيب .

1) أثبت أن : $\frac{\overline{اَ ب}}{\overline{اَ ح}} \times \frac{\overline{بَ ح}}{\overline{بَ ا}} \times \frac{\overline{حَ ا}}{\overline{حَ ب}} = 1 \qquad (1)$

(استعن بالنقطة ب″ مسقط النقطة ب على (ا ح) وفق منحى (Δ))

2) بالعكس لتكن ا′ ، ب′ ، ح′ ثلاث نقط من المستقيات (ب ح) ، (ح ا) ، (ا ب) على الترتيب . نفرض أن ا′ ، ب′ ، ح′ تختلف عن رؤوس المثلث ا ب ح وَ أنها تحقق المساواة (1) .

بيّن أن المستقيمين (بَ حَ) و (ب ح) غير متوازيين وأثبت أنهما يتقاطعان في النقطة ا′ .

المعالم للمستوي

يُنسب المستوي إلى معلم $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$

45. لتكن النقط ا(1 ، 2) ، ب(−5 ، 2) ، ح($\sqrt{3}$ ، 1) .

أحسب إحداثيي كل نقطة من النقط ا′ ، ب′ ، ح′ ، ء′ حيث $\overrightarrow{حا'} = \overrightarrow{اب}$ ؛

$\overrightarrow{اب'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{بح}$ ؛ $\overrightarrow{حح'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{حب}$ ؛ $\overrightarrow{اب} + \overrightarrow{حء'} = \vec{0}$

46. 1) أوجد إحداثيي كل نقطة من النقط ك ، ل ، ا ، ب ، ح ، ء المعرفة كما يلي :

$\overrightarrow{مك} = \vec{و}$ ؛ $\overrightarrow{مل} = \vec{ي}$ ؛ $\overrightarrow{ما} = \overrightarrow{مك} + \overrightarrow{مل}$ ؛ $\overrightarrow{مب} = \overrightarrow{مك} - \overrightarrow{مل}$

$\overrightarrow{مح} = -\overrightarrow{مك} - \overrightarrow{مل}$ ؛ $\overrightarrow{مء} = -\overrightarrow{مك} + \overrightarrow{مل}$

2) عيّن المركبتين السلميتين لكل شعاع من الأشعة التالية :

$\overrightarrow{اب}$ ؛ $\overrightarrow{بح}$ ؛ $\overrightarrow{حء}$ ؛ $\overrightarrow{ءا}$ ؛ $\overrightarrow{اح}$ ؛ $\overrightarrow{بء}$.

47. نعتبر النقط ا(−1 ، 3) ، ب(1 ، 1) ، ح(4 ، −2)

بيّن أن النقط ا ، ب ، ح على استقامة واحدة .

48. تُعطى النقطتان ا(3 ، 2) ، ب(−2 ، −1) .

أحسُب إحداثيي النقطة ح إذا كان $\overrightarrow{اح} = \frac{2}{5}\overrightarrow{اب}$

ثم أنشيء هذه النقطة علماً أن $\|\vec{و}\| = 2$ ؛ $\|\vec{ي}\| = 3$

49. لتكن النقط ا(−2 ، 4) ؛ ب(1 ، −2) ؛ ح(4 ، 2)

1) أحسب إحداثيي النقطة هـ منتصف [اح]

2) أحسب إحداثيي النقطة هـ′ نظيرة ب بالنسبة إلى هـ .

3) تحقق أن $\overrightarrow{اب} + \overrightarrow{حهـ'} = \vec{0}$

50. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط من المستوي معرفة كما يلي :

$\overleftarrow{م ا} = \overleftarrow{و} + 3\,\overleftarrow{ي}$ ؛ $\overleftarrow{م ب} = -2\,\overleftarrow{و} + 2\,\overleftarrow{ي}$ ؛ $\overleftarrow{م حـ} = 3\,\overleftarrow{و} - 2\,\overleftarrow{ي}$

1) اوجد إحداثيي النقطة د علماً أن ا ب حـ د متوازي أضلاع

2) عيّن إحداثيي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع ا ب حـ د .

51. يعطي الشعاعان $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ؛ $\overleftarrow{ف} \begin{pmatrix} \alpha \\ 8 \end{pmatrix}$.

1) عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتي يكون $\overleftarrow{ش}$ و $\overleftarrow{ف}$ متوازيين .

2) نفس السؤال من أجل $\overleftarrow{ش} \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\overleftarrow{ف} \begin{pmatrix} -4 \\ \alpha \end{pmatrix}$

52. لنعتبر النقط ا (1 ، −2) ؛ ب (5 ، −4) ؛ حـ (2 ، $-\frac{5}{2}$) ؛ د (س ، −3)

1) بيّن أن النقط ا ، ب ، حـ على استقامة واحدة .

2) عيّن قيمة العدد الحقيقي س علماً أن النقطة د تنتمي إلى (ا ب) .

53. احسُب إحداثيي كل نقطة من النقط التالية : ا ، ب ، حـ ، د حيث :

$\overleftarrow{م ا} = 2\,\overleftarrow{و} - 3\,\overleftarrow{ي}$ ؛ $\overleftarrow{ا ب} = \overleftarrow{و} + \overleftarrow{ي}$ ؛ $\overleftarrow{ا حـ} = 2\,\overleftarrow{و} - \overleftarrow{ي}$ ؛ $\overleftarrow{حـ د} = \overleftarrow{و} - 2\,\overleftarrow{ي}$

1) بيّن أن حـ هي منتصف [ب د] .

2) هل النقط ا ، ب ، حـ على استقامة واحدة ؟

54. لنعتبر النقط هـ (1 ، 2) ؛ ا (0 ، 3) ؛ ب (−1 ، −4) ؛ حـ ($\sqrt{3}$ ، $1 - \sqrt{3}$)

لتكن ا′ ، ب′ ، حـ′ نظائر النقط ا ، ب ، حـ على الترتيب بالنسبة الى هـ

عيّن إحداثيات هذه النقط .

55. لتكن النقط $ا(3 ، 0)$ ؛ $ب(5 ، 0)$ ؛ $ح(0 ، \frac{9}{2})$ ؛ $ء(0 ، \frac{15}{2})$

بيّن أن المستقيمين (اح) و (ب ء) متوازيان .

56. شعاعان $\overleftarrow{و}'$ ، $\overleftarrow{ي}'$ معرّفان كما يلي : $\overleftarrow{و}' = \overleftarrow{و}$ ؛ $\overleftarrow{ي}' = \overleftarrow{و} - 4\overleftarrow{ى}$

1) أثبت أن $(\overleftarrow{و}' ، \overleftarrow{ى}')$ أساس للمستوي

لتكن $\binom{س}{ع}$ المركبتين السلميتين للشعاع $\overleftarrow{ش}$ بالنسبة إلى الأساس $(\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$.

اوجد المركبتين السلميتين لهذا الشعاع بالنسبة إلى الأساس $(\overleftarrow{و}' ، \overleftarrow{ي}')$.

2) لتكن $\begin{pmatrix} 1 \\ 4- \end{pmatrix}$ المركبتين السلميتين للشعاع $\overleftarrow{ش}'$ بالنسبة إلى الأساس $(\overleftarrow{و}' ، \overleftarrow{ي}')$. أوجد المركبتين السلميتين لهذا الشعاع بالنسبة إلى الأساس $(\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$.

57. $(\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$ ، $(\overleftarrow{و}' ، \overleftarrow{ي}')$ أساسان للمستوي حيث :

$\overleftarrow{و}' = س\overleftarrow{و} + ع\overleftarrow{ى}$ ؛ $\overleftarrow{ى}' = (4 س - 3 ع)\overleftarrow{و}' + (3 س + ع)\overleftarrow{ى}$

أوجد العددين الحقيقيين س ، ع .

58. لتكن ا ، ب ، ح ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

ه نقطة من المستوي إحداثياها (س ، ع) في المعلم $(ا ، \overleftarrow{اب} ، \overleftarrow{اح})$

عيّن إحداثيي النقطة ه في المعلم $(ب ، \overleftarrow{بح} ، \overleftarrow{با})$.

59. م′ نقطة من المستوي إحداثياها (− 1 ، 0) في المعلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$.

$\overleftarrow{و}'$ ، $\overleftarrow{ى}'$ شعاعان معرّفان كما يلي : $\overleftarrow{و}' = \overleftarrow{و} + 2\overleftarrow{ى}$ ؛ $\overleftarrow{ى}' = -\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ى}$

1) أثبت أن $(م′ ، \overleftarrow{و}' ، \overleftarrow{ى}')$ معلم للمستوي .

لتكن ه نقطة من المستوي إحداثياها (س ، ع) في المعلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$

و (س′ ، ع′) في المعلم $(م′ ، \overleftarrow{و′} ، \overleftarrow{ى′})$.

2) أُحسُب كلاً من س ، ع بدلالة س′ وع′ ثم كلاً من س′ ، ع′ بدلالة س وع

هل توجد نقطة من المستوي لها نفس الإحداثيين في المعلمين المذكورين ؟

60. تعطى ثلاث نقط ا(2 ، − 3) ؛ ب(4 ، 1) ؛ حـ(0 ، − 1)

1) بيّن أن $(ا ، \overleftarrow{اب} ، \overleftarrow{احـ})$ معلم للمستوي .

2) لتكن ﻫ نقطة من المستوي حيث $\overleftarrow{مﻫ} = \overleftarrow{و} + \overleftarrow{ى}$

اوجد إحداثيي النقطة ﻫ في المعلم $(ا ، \overleftarrow{اب} ، \overleftarrow{احـ})$.

3) لتكن ﻫ′ نقطة من المستوي حيث $\overleftarrow{اﻫ′} = \overleftarrow{اب} + \overleftarrow{احـ}$

اوجد إحداثيي ﻫ′ في المعلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$.

61. ا ب حـ مثلث ا′ ، ب′ ، حـ′ ثلاث نقط معرفة كما يلي :

$$\overleftarrow{اا′} = \frac{1}{3}\overleftarrow{اب} \ ؛ \ \overleftarrow{بب′} = 2\overleftarrow{بحـ} \ ؛ \ \overleftarrow{حـحـ′} = \frac{1}{2}\overleftarrow{حـا}$$

1) بيّن أن $\overleftarrow{احـ′} = \frac{1}{2}\overleftarrow{احـ}$ ؛ $\overleftarrow{اب′} = -\overleftarrow{اب} + 2\overleftarrow{احـ}$

2) عيّن إحداثيي كل من النقط ا′ ، ب′ ، حـ′ في المعلم $(ا ، \overleftarrow{اب} ، \overleftarrow{احـ})$

3) أُحسُب المركبتين السلميتين لكل من الأشعة $\overleftarrow{ا′ب′}$ ، $\overleftarrow{ا′حـ′}$ ، $\overleftarrow{ب′حـ′}$

في المعلم $(ا ، \overleftarrow{اب} ، \overleftarrow{احـ})$.

4) أثبت أن النقط ا′ ، ب′ ، حـ′ على استقامة واحدة .

62. $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$ ؛ $(م′ ، \overleftarrow{و′} ، \overleftarrow{ى′})$ معلمان للمستوي .

ﻫ نقطة من المستوي إحداثياها (س ، ع) في المعلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$

و (س′ ، ع′) في المعلم $(م′ ، \overleftarrow{و′} ، \overleftarrow{ى′})$ حيث :

س′ = 2 س − ع + 1 ؛ ع′ = − 3 س + 2 ع − 2

1) أُحسُب إحداثيي النقطة م في المعلم (م′ ، $\overleftarrow{و'}$ ، $\overleftarrow{ى'}$) ثم المركبيتين السلميتين لكل من الشعاعين $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$ بالنسبة إلى الأساس ($\overleftarrow{و'}$ ، $\overleftarrow{ى'}$)

2) أُحسُب إحداثيي النقطة م′ في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) ثم المركبتين السلميتين لكل من الشعاعين $\overleftarrow{و'}$ ، $\overleftarrow{ى'}$ بالنسبة إلى الأساس ($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .

المرجـــح

.63 أوجد مرجح النقطتين أ ، ب المرفقتين بالمعاملين α ، β في كل حالة من الحالات التالية :

$(\alpha ، \beta) = (1 ، 0)$ ؛ $(\alpha ، \beta) = (0 ، 1)$ ؛

$(\alpha ، \beta) = (\frac{3}{7} ، \frac{3}{7})$

.64 أ ، ب نقطتان متمايزتان من المستوي .

أنشيء النقطة هـ ، إن وجدتْ ، في كل حالة من الحالات التالية :

1) $-2\,\overleftarrow{هـ أ} + 3\,\overleftarrow{هـ ب} + \overleftarrow{أ ب} = \overleftarrow{0}$

2) $3\,\overleftarrow{هـ أ} + 7\,\overleftarrow{هـ ب} - 2\,\overleftarrow{أ ب} = \overleftarrow{0}$

3) $3\,\overleftarrow{هـ أ} - 3\,\overleftarrow{هـ ب} + 5\,\overleftarrow{أ ب} = \overleftarrow{0}$

.65 (ق) مستقيم ؛ أ و ب نقطتان متمايزتان من (ق) .

1) حـ نقطة معرفة كما يلي : $\overleftarrow{أ حـ} = \frac{3}{5}\,\overleftarrow{أ ب}$

أثبت أن حـ هي مرجح النقطتين أ ، ب المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما .

2) وبصورة عامة إذا كانت هـ نقطة معرفة كما يلي : $\overleftarrow{أ هـ} = ك\,\overleftarrow{أ ب}$

أثبت أن هـ هي مرجح النقطتين أ ، ب المرفقتين بمعاملين يطلب حسابهما بدلالة ك .

66. لتكن ا ، ب نقطتين من المستوي .

1) عيّن مجموعة النقط ه من المستوي التي تحقق المساواة التالية :

$$\left\| -2\overrightarrow{\text{ها}} + 4\overrightarrow{\text{هب}} \right\| = 2\,\text{اب}$$

2) نفس السؤال من أجل $\left\| 3\overrightarrow{\text{ها}} - 4\overrightarrow{\text{هب}} \right\| = \text{هب}$

67. اب ح مثلث . أوجد مجموعة النقط ه من المستوي في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\left\| 4\overrightarrow{\text{ها}} - 5\overrightarrow{\text{هب}} \right\| = \text{هح}$

2) $\left\| \overrightarrow{\text{ها}} + 2\overrightarrow{\text{هب}} \right\| = \left\| \overrightarrow{\text{هب}} + 2\overrightarrow{\text{هح}} \right\|$

3) $\left\| \overrightarrow{\text{ها}} - 3\overrightarrow{\text{هب}} \right\| = \left\| \overrightarrow{\text{هب}} + \overrightarrow{\text{هح}} \right\|$

68. ينسب المستوي إلى المعلم (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى}}$) .

تعطى النقطتان ا(− 2 ، 1) ؛ ب(3 ، − 4)

أُحسُب إحداثيي مرجح النقطتين ا ، ب المرفقتين بالمعاملين

(− 3) و (+ 1) على الترتيب .

69. أوجد مرجح النقطتين ا ، ب ، ح المرفقة بالمعاملات α ، β ، γ

على الترتيب ؛ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\alpha = 1$ ؛ $\beta = -3$ ؛ $\gamma = 4$ 3) $\alpha = 1$ ؛ $\beta = 0$ ؛ $\gamma = 0$

2) $\alpha = 1$ ؛ $\beta = -1$ ؛ $\gamma = 2$ 4) $\alpha = 2$ ؛ $\beta = 1$ ؛ $\gamma = 1$.

70. ا ، ب ، ح ثلاث نقط متمايزة حيث $\overrightarrow{\text{اح}} = -\dfrac{5}{2}\overrightarrow{\text{اب}}$.

أوجد مرجح النقطتين ا ، ب ، ح المرفقة بالمعاملات

(− 2) ؛ (− 7) ؛ (+ 5) على الترتيب .

نفس السؤال إذا كانت المعاملات هي 2 ، 1 ، 3 على الترتيب .

71. $ا ب ح$ مثلث . أنشيء النقطة $م$ ؛ إن وجدتْ ؛ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\overrightarrow{2 م ا} + \overrightarrow{م ب} - \overrightarrow{ب ح} = \vec{0}$

2) $\overrightarrow{3 م ا} + \overrightarrow{م ب} - \overrightarrow{4 م ح} = \vec{0}$

3) $\overrightarrow{4 م ا} - \overrightarrow{م ب} + \overrightarrow{م ح} + \overrightarrow{2 ا ب} + \overrightarrow{ا ح} = \vec{0}$.

72. $ا$ ؛ $ب$ نقطتان متمايزتان من المستوي ؛ α عدد حقيقي يختلف عن (+ 1) وعن (− 1)

1) أنشيء النقطة $ح$ مرجح النقطتين $ا$. $ب$ المرفقتين بالمعاملين (+ 1) و α على الترتيب .

2) أنشيء النقطة $ه$ مرجح النقطتين $ا$ ، $ب$ المرفقتين بالمعاملين (+ 1) و (− α) على الترتيب .

3) أحسُب $\overrightarrow{ا ح}$ ؛ $\overrightarrow{ا ه}$ ، $\overrightarrow{ح ه}$ بدلالة العدد α والشعاع $\overrightarrow{ا ب}$.

عيِّن قيمة العدد الحقيقي α في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\overrightarrow{ح ه} = \overrightarrow{ا ب}$

2) $\|\overrightarrow{ح ه}\| = \|\overrightarrow{ا ب}\|$

3) $\|\overrightarrow{ح ه}\| = \frac{3}{4}\|\overrightarrow{ا ب}\|$

4) $ح$ منتصف [$ا ه$] .

73. تعطى ثلاث نقط $ا$ ، $ب$ ، $ح$ ليست على استقامة واحدة تُرفَقُ هذه النقط بالمعاملات 2 . 1 . ط على الترتيب .

لتكن $ه_ط$ نقطة من المستوي .

1) اوجد قيم العدد الحقيقي ط التي من اجلها تكون $ه_ط$ مرجح النقط $ا$. $ب$. $ح$ المرفقة . على الترتيب . بالمعاملات 2 ، 1 . ط .

2) أنشيء النقطة $ه_ط$ من أجل ط = 0 ؛ ط = + 1 ثم ط = − 1

3) أثبت أن النقطة $ه_ط$ تنتمي إلى مستقيم ثابت يطلب تعيينه .

4) إذا كانت $م$ نقطة كيفية من المستوي عيِّن ممثلاً للشعاع $\overrightarrow{ش}$ حيث $\overrightarrow{ش} = \overrightarrow{2 م ا} + \overrightarrow{م ب} - \overrightarrow{3 م ح}$.

المستقيم في الهندسة المستوية التحليلية

المستوي ، في التمارين التالية ، منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$)

74. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة ا ويوازي الشعاع $\overleftarrow{ش}$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) ا(−2 ، 2) ؛ $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ 2) ا(−2 ، 2) ؛ $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

3) ا(0 ، −5) ؛ $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 4) ا(4 ، $\sqrt{3}$) ؛ $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

5) ا(4 ، −5) ؛ $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix}-1+\sqrt{2}\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$

ثم استنتج معادلة ديكارتية لكل من هذه المستقيمات

75. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطتين ا ، ب في كل حالة من الحالات التالية

1) ا(1 ، 5) ؛ ب(−2 ، 4)
2) ا(−1 ، −3) ؛ ب(2 ، 1)
3) ا(0 ، −5) ؛ ب(1 ، −1)
4) ا(0 ، 0) ؛ ب(0 ، 1)
5) ا($2+\sqrt{2}$ ، $2-\sqrt{2}$) ؛ ب($\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$)
6) ا(1 ، 0) ؛ ب(2 ، 0)

ثم استنتج معادلة ديكارتية لكل من هذه المستقيمات

76. عيّن تمثيلاً وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة ا ويوازي المستقيم (∆) في كل حالة من الحالات التالية

1) ا(0 ، 6) ؛ (∆) : 3س − 5ع + 8 = 0.
2) ا(1 ، −2) ؛ (∆) : س + 2ع + 5 = 0

3) أ (− 3 ، + 1) ؛ (Δ) : س − 3 = 0

4) أ (− 3 ، 1) ؛ (Δ) : $\begin{cases} س = 2\lambda - 3 \\ ع = 4 - \lambda \end{cases}$ (حيث $\lambda \in$ ح)

5) أ (2 ، 3) ؛ (Δ) : $\begin{cases} س = 2 - \lambda \\ ع = 1 + \lambda \end{cases}$ (حيث $\lambda \in$ ح)

77. عيّن معادلة ديكارتية للمستقيم الذي يشمل النقطة أ وله شعاع توجيه $\vec{ش}$ في كل حالة من الحالات التالية

أ (3 ، − 1) ؛ $\vec{ش} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	أ $\left(-2 ، 5 \right)$ ؛ $\vec{ش} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
أ (− 1 ، 2) ؛ $\vec{ش} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	أ $\left(\frac{1}{2} ، \frac{-3}{4} \right)$ ؛ $\vec{ش} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(ملاحظة: في الحالة الثالثة يظهر فوق الشعاع الكسر $\frac{1}{2}$.)

احسب إحداثيات نقط تقاطع هذه المستقيمات مع حاملي محوري الإحداثيات

78. عيّن معادلة ديكارتية للمستقيم الذي يشمل النقطتين أ ، ب في كل حالة من الحالات التالية

1) أ (0 ، 2) ، ب (5 ، 0)

2) أ (1 ، 2) ، ب (0 ، 3)

3) أ (0 ، 0) ، ب (− 2 ، 5)

4) أ (0 ، 0) ، ب (0 ، 3)

5) أ ($2 + \sqrt{3}$ ، 3) ، ب ($2 - \sqrt{3}$ ، − 1)

وأُحسب احداثيات نقط تقاطع هذه المستقيمات مع حاملي محوري الإحداثيات

79. أنشيء ، في نفس المعلم ، المستقيمات التالية ، المعرفة بمعادلات ديكارتية لها :

1) (Δ_1) : ع + 2 = 0 ‏ ‏ ‏ ‏ 2) (Δ_2) : ع − 2 س = 0

3) (Δ_3) : 3 س − 2 ع − 6 = 0 ‏ ‏ ‏ ‏ 4) (Δ_4) : 5 س + 2 ع = 8

5) (Δ_5) : 2 (س − 3 ع) = 3 (2 س − 5)

عيّن تمثيلا وسيطيا لكل مستقيم منها وأعط معامل توجيه كل منها

80. عيّن شعاعي توجيه لكل مستقيم من المستقيمات التالية وأعط ، إن أمكن ، معامل توجيه كلّ منها

1) (Δ_1) : 2 س − 4 ع + 1 = 0 ؛

2) (Δ_2) : − س + 2 ع + 5 = 0

3) (Δ_3) : − 5 س + 3 = 0 ؛

4) (Δ_4) : 4 ع − 1 = 0

أنشيء ، في نفس المعلم ، هذه المستقيمات

81. أنشيء مجموعة النقط ، من المستوي ، التي إحداثياتها تحقق إحدى المعادلات التالية

1) ع + 2 | س | = 0 ؛

2) | س − 3 | − ع = 0

3) | س | + | ع | = 4 ؛

4) ع = س + $\sqrt{(\text{س} - 2)^2}$

5) ع = | س − 3 | + | س − 1 | − | س + 2 |

6) $(\text{س} + 2\text{ع})^2 - 9 = 0$ ؛ ‏ ‏ 7) $(2\text{س} - 3\text{ع})^2 = 4$

8) $(3\text{س} - \text{ع} + 1)^2 - (\text{ع} + 2)^2 = 0$

9) $(-\text{س} + 2\text{ع} + 2)^2 - (\text{ع} + 1)(\text{س} - 2\text{ع} - 2) = 0$

82. اُذكر ، في كل حالة من الحالات التالية ، إن كان المستقيمان (Δ_1) وَ (Δ_2) متوازيين أم متقاطعين .

1) (Δ_1) : 3 س − 2 ع + 5 = 0 ؛

(Δ_2) : $-1{,}5$ س $+ \frac{3}{5}$ ع $+ 2 = 0$

2) (Δ_1) : س $+ 1{,}2$ ع $- 3 = 0$ ؛

(Δ_2) : $0{,}5$ س $+ \frac{3}{5}$ ع $- 1{,}5 = 0$

3) (Δ_1) : 2 س $+ (\sqrt{3} - 1)$ ع $+ 2 = 0$ ؛

(Δ_2) : $(\sqrt{3} + 1)$ س $+$ ع $- 4 = 0$

4) (Δ_1) : س $+ (\sqrt{2} - 2)$ ع $+ 7 - 5\sqrt{2} = 0$

(Δ_2) : $(\sqrt{2} + 1)$ س $- \sqrt{2}$ ع $+ \sqrt{2} - 3 = 0$

83. عيّن ، في كل حالة من الحالتين التاليتين ، قيم العدد الحقيقي ط حتي يكون المستقيمان (Δ_1) و(Δ_2) متوازيين .

1) (Δ_1) : (2 ط − 4) س + 5 ع = ط + 2

(Δ_2) : (ط + 5) س − ع = 3 ط − 1

2) (Δ_1) : (ط − 3) س + (ط − 7) ع = ط + 1

(Δ_2) : (ط + 1) س + (ط + 3) ع = 5 − 3 ط

84. عيّن ، في كل حالة من الحالتين التاليتين ، العددين الحقيقيين ص ، ط حتي يكون المستقيمان (Δ_1) و(Δ_2) متطابقين

1) (Δ_1) : (ط + 1) س + ع = 3 ص − 2

(Δ_2) : (2 ص − 3) س + 3 ع = ط [illegible] ؛

2) (Δ_1) : (ط + 4) س + (ص + 1) ع = 3 ط − 3

(Δ_2) : (ص − 5) س + (ص + 2) ع = 3 ص + 20

85. لتكن ($\Delta_{ط}$) مجموعة النقط م (س ، ع) من المستوي التي إحداثياتها تحقق

(9 − ط²) س − (ط² + 3 ط) ع + ط − 1 = 0

ط هو وسيط حقيقي

1) عيّن ط حتى تكون $(\Delta_{ط})$ مستقيما

2) عيّن ط في كل حالة من الحالات التالية

- المستقيم $(\Delta_{ط})$ يوازي الشعاع $\overleftarrow{و}$
- المستقيم $(\Delta_{ط})$ يوازي الشعاع $\overleftarrow{ي}$
- المستقيم $(\Delta_{ط})$ يشمل المبداء م للمعلم
- المستقيم $(\Delta_{ط})$ يشمل النقطة أ $\left(-\frac{1}{3} ، \frac{1}{3}\right)$
- معامل توجيه المستقيم $(\Delta_{ط})$ هو $\left(\frac{3}{4}\right)$
- المستقيم $(\Delta_{ط})$ يوازي المستقيم (Δ') الذي معادلته ع = − س
- المستقيم $(\Delta_{ط})$ يوازي المستقيم (Δ'') الذي معادلته

$$س + 2 ع - 5 = 0$$

86. نفس الأسئلة بالنسبة إلى المجموعة $(\Delta_{ط})$ المعرفة كما يلي

$$(9 - ط^2) س - (ط^2 + 3 ط) ع + | ط + 3 | = 0$$

محتويات الكتاب

الجزء الأول

الباب الأول : المنطق والمجموعات

الباب الثاني : انشطة حول الحساب العددي

الباب الثالث : مراجعة وتتمات في الهندسة المستوية

الباب الرابع : العلاقات والتطبيقات والعمليات الداخلية

الباب الخامس : أشعة المستوى



2000 - 1999

M.S - 1104

